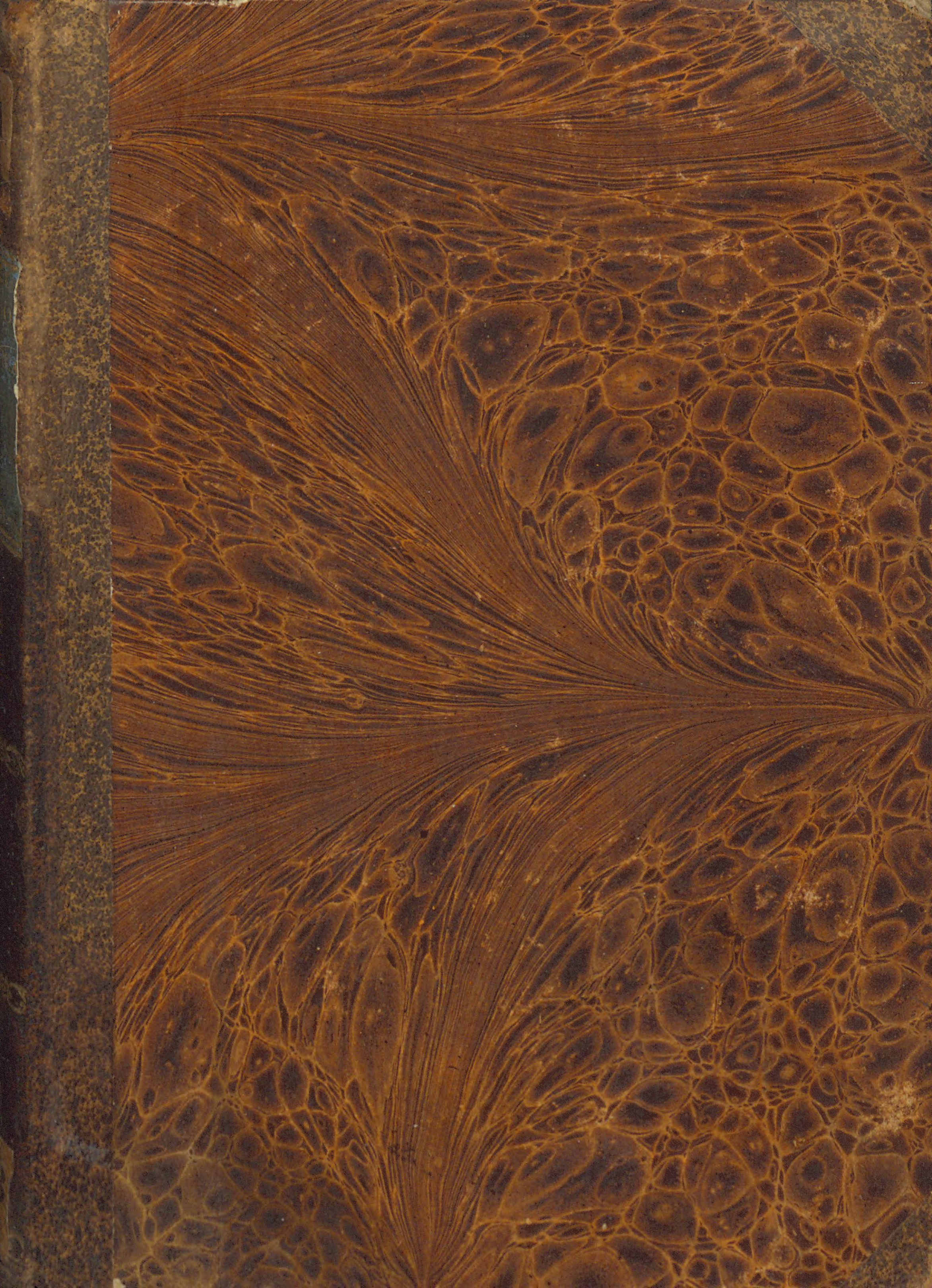
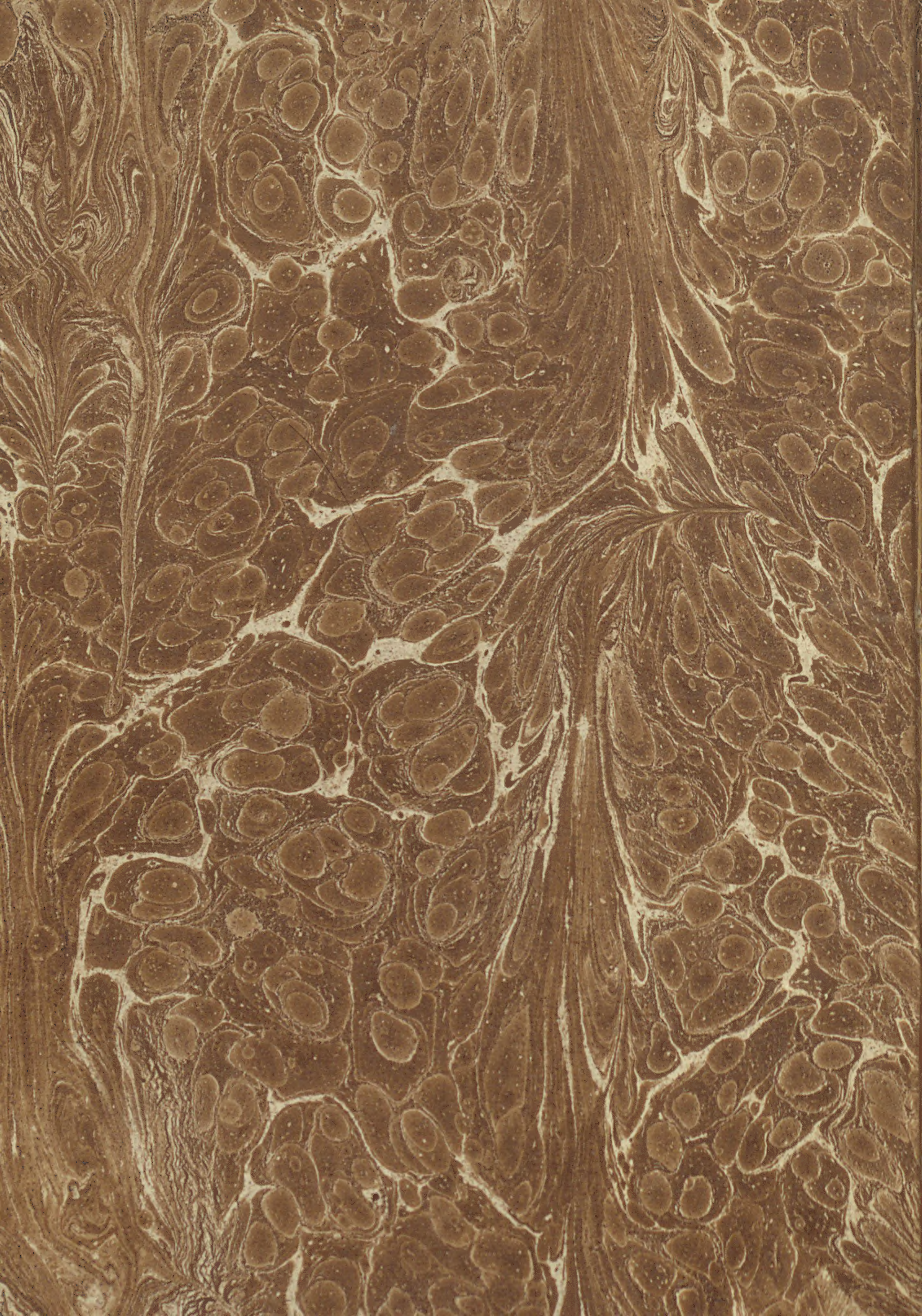
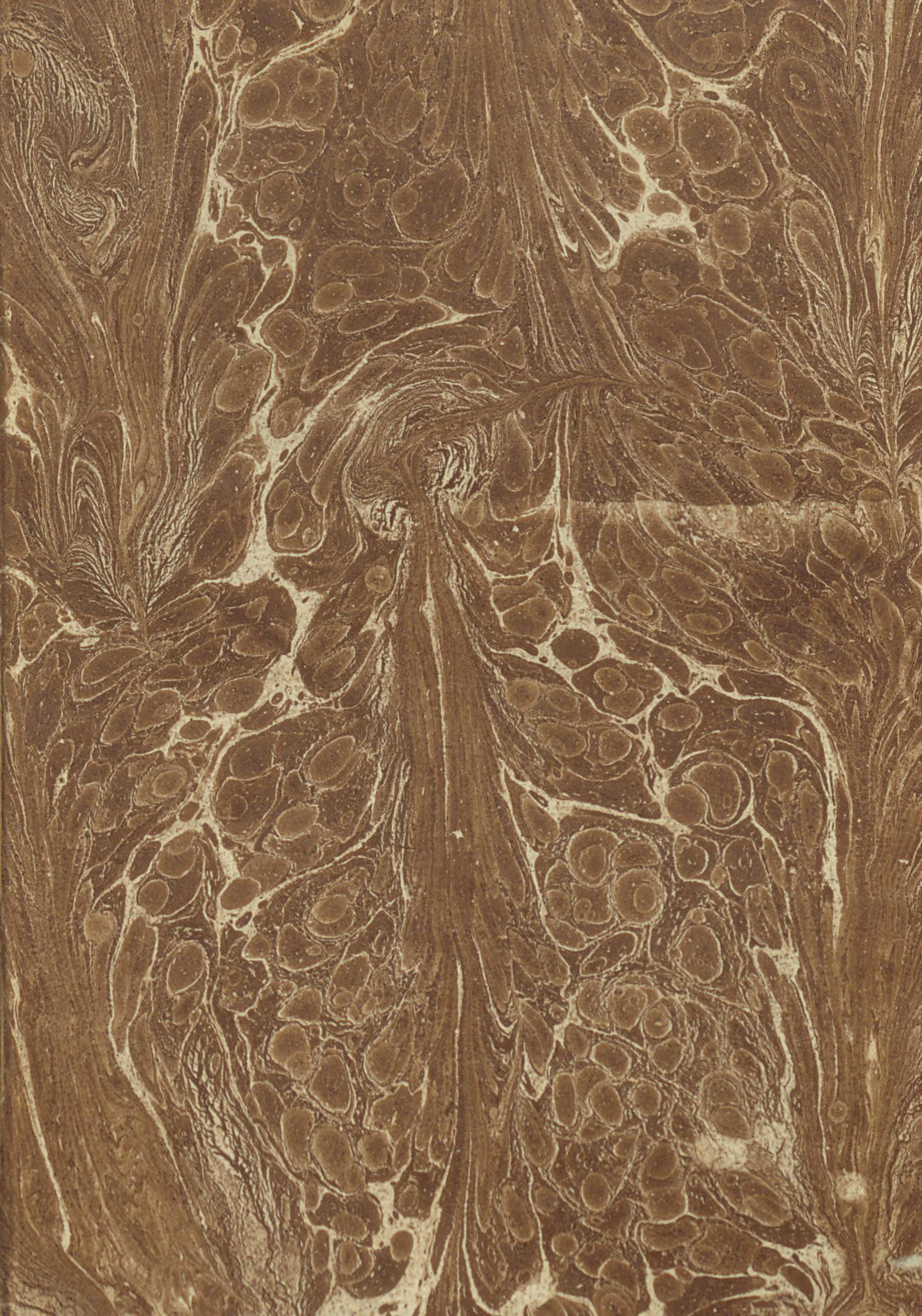






TRATADO ELEMENTAL
DE MATEMÁTICAS

ESCRITO DE ÓRDEN DE S. M.

PARA USO DE LOS CABALLEROS SEMINARISTAS
DEL SEMINARIO DE NOBLES DE MADRID
Y DEMAS CASAS DE EDUCACION DEL REYNO,

POR D. JOSEF MARIANO VALLEJO,

CATEDRÁTICO que fué de Matemáticas, Fortificacion, Ataque y Defensa de las Plazas en dicho Seminario, Encargado del curso de Geodesia por la Academia de S. Fernando, Socio Académico de la de Ciencias Naturales y Artes de Barcelona, y en la actualidad Oficial mayor del Archivo de la Secretaría de la Gobernacion de la Península, y Diputado en las Córtes generales y extraordinarias por la provincia de Granada.

TOMO II. PARTE II.

Que contiene las funciones, límites, cálculo de las diferencias, y el diferencial é integral.



MALLORCA.

IMPRENTA DE FELIPE GUASP.
AÑO DE 1813.

INDICE.

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE VOLÚMEN.

De las Funciones.

Pág.

Descomposicion de las funciones quebradas en sus funciones simples.

Del desarrollo de las funciones en series infinitas.

De la sumacion de las series y de su método inverso.

Del desarrollo de las funciones trascendentes en series.

Del método de los límites.

Del cálculo de las diferencias.

Del cálculo diferencial.

Principios de la diferenciacion de las funciones de una sola variable.

De las diferenciales segundas, terceras, &c. y de su uso para desenvolver en serie las funciones, y hallar sus incrementos.

De la diferenciacion de las funciones trascendentes.

De la diferenciacion de qualesquiera equaciones de dos variables.

Aplicacion del cálculo diferencial para determinar los máxîmos y mínimos de las funciones de una sola variable.

Aplicacion del cálculo diferencial á la teoría de las lineas curvas.

CÁLCULO INTEGRAL.

De la integracion de las funciones racionales de una sola variable.

Método general para obtener los valores aproximados de las integrales.

ERRATAS.

Pág. 179. lin. 20 *dice* asnítotas.....diga asíntotas.

Pág. 224. lin. últ. *dice* $-M(l.x)^{n-1}$....diga $-nM(l.x)^{n-1}$.

Continúan los subscriptores. D. Manuel Morete, teniente coronel de Ingenieros; D. Jorge Truyols, Brigadier de los Exércitos Nacionales.

DE LAS FUNCIONES.

418 Hemos dicho [I. 311] que cantidad variable es aquella que puede tener todos los valores que se quiera; toda cantidad ó expresion cuyo valor depende del de una variable, se llama *funcion* de la misma variable; de donde resulta que toda funcion de una variable es tambien una cantidad variable. Los primeros analistas que usaron de la voz *funcion* solo fué para denotar las diferentes potencias de una variable; pero en la actualidad se ha extendido su significado á *toda expresion que se compone de constantes y de variables.* Como es esencial que si varía la variable, varíe tambien la funcion, y hay expresiones analíticas compuestas de constantes y de variables, cuyo valor es constante, á estas se les da el nombre de *funciones aparentes* para distinguirlas de las otras á que se da el nombre de *reales.* Las cantidades

$a+2x$; $ax-x^2$; $ax+b\sqrt{a^2-x^2}$, son funciones reales de la variable x;

las cantidades ó expresiones x^0, 1^x, $\frac{b^2-bx}{b-x}$, $\frac{\log.\frac{x}{a}}{\log.x-\log.a}$, &c.

son funciones aparentes de x, ó en realidad no son funciones suyas; porque variando x no varía la expresion; así, x^0, 1^x siempre son iguales

á la unidad, $\frac{b^2-bx}{b-x}$ haciendo la division resulta b; y $\frac{\log.\frac{x}{a}}{\log.x-\log.a}$

siempre es igual con la unidad; porque siendo el logaritmo de un quebrado igual al del numerador menos el del denominador, el dividendo es igual con el divisor.

419 Las funciones se distinguen principalmente por el modo con que está enlazada la variable con las constantes; y así se dividen en *algebráicas* y *trascendentes*; algebráicas son aquellas en que las variables estan combinadas con las constantes solo por las simples operaciones del Algebra, como son adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raices. Las trascendentes son aquellas en que hay cantidades trascendentes, como son logaritmos, exponenciales, trigonométricas, y otras innumerables que suministra el cálculo que daremos á conocer con el nombre de *infinitesimal.* A aquellas cantidades ó expresiones en que las variables tienen exponentes irracionales, las llamaron algunos *funciones interscendentes.*

420 Las funciones algebráicas se dividen en *racionales* é *irracionales*; racionales son aquellas que no envuelven ningun radical, é irra-

cionales aquellas en que la variable se halla debaxo de algun radical. Las funciones irracionales se dividen en *explícitas* é *implícitas*, ó en *expresas* y *ocultas*; explícitas ó expresas son aquellas en que la variable está afecta de radicales como $\sqrt{x}$, $a+\sqrt{b^2-x^2}$, &c.; implícitas ú ocultas aquellas en que solo se manifiestan los radicales despues de la resolucion de la equacion; así, en la equacion $z^7=axz^2-bx^5$, z es una funcion irracional implícita de x; porque el valor que expresa z no se puede manifestar á causa de que el Algebra no ha llegado á este grado de perfeccion.

421 Las funciones racionales se dividen por último en *enteras* y *quebradas*; son enteras quando la variable no tiene exponente negativo, ni se halla en el denominador; de donde se deduce que funciones quebradas son aquellas en que la variable se halla en el denominador, ó en el numerador con exponente negativo; la fórmula general de las funciones enteras de x es $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+$&c.

Y no se puede discurrir ninguna funcion entera de x que no esté contenida en esta expresion; pues no debiendo tener exponentes negativos ni fraccionarios, solo podrá haber, despues de hechas las reducciones convenientes, un término en que no se halle x, otro en que se halle elevada á la primera potencia, otro en que se halle á la segunda, &c.

La de las funciones quebradas, á causa de que la combinacion de muchas fracciones se puede reducir á una sola fraccion, tendrá esta forma

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{\&c.}}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3+e'x^4+\text{\&c.}}$$

donde se debe advertir que $a,b,c,d,e,$&c. $a',b',c',d',$&c. expresan cantidades constantes, positivas ó negativas, enteras ó quebradas, racionales ó irracionales, y aunque sean trascendentes, no mudan la naturaleza de la funcion.

Quando el mayor exponente de la variable en el numerador es menor que el mayor en el denominador, la funcion quebrada se llama *genuina*; y quando no se verifica esta circunstancia se llama *expuria*.

422 Una de las principales divisiones que se hace de las funciones es en *uniformes* y *multiformes*; aquellas son las que, para cada valor determinado de la variable, no tienen mas de un valor; y las multiformes son las que, dando á la variable un valor qualquiera, resultan para la funcion muchos valores determinados; se llama *biforme* quando á cada valor de la variable corresponden dos en la funcion, como en $\sqrt{ax+x^2}$; ó en general siempre que siendo P y Q funciones de x, la funcion X de x se determine por esta equacion $X^2-PX+Q=0$; es *triforme* quando á cada valor de la variable corresponden tres en la funcion; *quadriforme* quando quatro; y en general *multiforme* quando muchos; así, la expresion $X^n-PX^{n-1}+QX^{n-2}-RX^{n-3}+SX^{n-4}-$&c.

siendo P, Q, R, &c. funciones de x, es la fórmula general de las funciones multiformes. Las funciones trascendentes tambien son uniformes y multiformes, y tambien las hay *infinitiformes*, ó que pueden tener para cada valor de la variable todos los valores que se quiera, como es el arco de círculo cuyo seno es x; pues hay innumerables arcos circulares [15] que tienen el mismo seno.

423 *Si* z *es una funcion qualquiera de* x, *tambien será* x *funcion de* z; pues siendo z funcion de x, habrá una equacion en que se determine z en valores de x y de constantes; de donde se podrá deducir el valor de x en valores de z y de constantes, y siendo z variable [418] será x funcion de z.

424 *Si* u *y* z *fuesen funciones de* x *será tambien* u *funcion de* z, *y* z *funcion de* u; pues siendo u y z funciones de x, será tambien x funcion de u y de z [423]; por lo que una funcion de u será igual á una funcion de z, de cuya equacion se podrá deducir u en valores de z, y z en valores de u; por lo que u es funcion de z y z lo es de u.

425 *Una funcion multiforme de* x *es par*, *quando para qualquier valor de* x *tiene muchos valores determinados*, *que son los mismos ya se ponga en vez de* x *la cantidad* +k *ó*—k; por lo que es indispensable que el número de dimensiones de x en todos los términos sea par; de donde se infiere que las funciones pares se pueden definir diciendo *que son funciones de* x^2 *ó del quadrado de una variable.*

Es impar una funcion quando substituyendo en vez de la variable, *la variable con el signo negativo*, *resulta negativa la funcion*; como x, x^3, x^5, &c. x^{-1}, x^{-3}, y $x^{\frac{m}{n}}$ si n y m fuesen números ímpares.

426 *Si una funcion par de* x *se multiplica por qualquier funcion impar de* x, *el producto será una funcion impar de* x.

Porque si suponemos que P sea una funcion par de x, tendremos que no se alterará si en vez de x se substituye $-x$; y si suponemos que Q sea una funcion ímpar de x, tendremos que si en vez de x se substituye $-x$, Q se convertirá en $-Q$; luego el producto PQ se transformará en $-PQ$, y será por lo mismo PQ una funcion ímpar de x. Lo mismo resulta *si una funcion par se divide por una ímpar ó al contrario.*

427 *Si una funcion ímpar se multiplica ó parte por otra ímpar*, *el resultado será una funcion par.*

Sean Q y S funciones ímpares de x, de modo que si en vez de x se pone $-x$, se conviertan en $-Q$ y $-S$; en cuyo caso el producto QS ó el quociente $\frac{Q}{S}$ permanece el mismo ya se substituya $-x$ en vez de x, porque el 1.º se convierte en $-Q\times-S=QS$, y el 2.º en $\frac{-Q}{-S}=\frac{Q}{S}$.

De donde se infiere que *toda potencia par de una funcion qualquiera*

es par; y que toda potencia impar de una funcion es par quando la funcion lo es; y es impar quando lo sea la funcion.

428 *Si Z es funcion de* z, *y X de* x, *y X se determina por la variable* x *y constantes del mismo modo que Z se determina por la variable* z *y constantes, entonces estas funciones se llaman funciones semejantes de* x *y de* z.

Por exemplo: si fuese $Z=a+bz+cz^2$, y $X=a+bx+cx^2$, serán Z y X funciones semejantes de z y de x; y del mismo modo en las funciones multiformes como $Z^3=az^2Z+b$ y $X^3=ax^2X+b$, Z y X son funciones semejantes de z y x; de aqui se sigue que si X y Z *fuesen funciones semejantes, entonces si en vez de* z *se escribe* x, *la funcion Z se convertirá en la funcion X.*

429 Tambien hay funciones de dos y de mas variables, segun sean dos ó tres las variables que juntas con las constantes entren en la expresion; y las funciones de muchas variables se dividen del mismo modo que las de una sola; pero en estas deben llamar nuestra atencion las que se llaman *homogéneas* y *heterogéneas*; es homogénea una funcion quando en todos sus términos hay un mismo número de dimensiones variables; y es heterogénea quando concurren diverso número de dimensiones variables. Las funciones homogéneas se subdividen cómodamente segun el número de dimensiones que hay en sus términos. Así, $az+bx$ será la fórmula general de las funciones enteras homogéneas de una dimension entre dos variables; la expresion $az^2+bzx+cx^2$ será la fórmula general de las funciones de dos dimensiones; la de tres dimensiones es $az^3+bz^2x+czx^2+dx^3$; la de quatro, $az^4+bz^3x+cz^2x^2+dzx^3+ex^4$, y así en adelante: y por analogía la cantidad sola a será la forma de la funcion de ninguna dimension. Paraque una funcion quebrada sea homogénea, es necesario que su numerador y denominador sean funciones homogéneas.

Así, la fraccion $\frac{ax^2+bz^2}{ax-bz}$ será una funcion homogénea de x y de z: el número de dimensiones se obtiene restando el número de dimensiones del denominador del número de dimensiones del numerador, por lo que la funcion de arriba es de una dimension. La fraccion $\frac{x^5+z^5}{x^2+z^2}$ es una funcion de tres dimensiones. Quando en el numerador y en el denominador hay el mismo número de dimensiones, entonces la funcion es de ninguna dimension, como la $\frac{x^3+z^3}{x^2z}$, ó las $\frac{z}{x}$, $\frac{az^2}{x^2}$, $\frac{bx^2}{z^2}$.

Y quando el número de dimensiones del denominador es mayor que el del numerador, el número de dimensiones de la funcion es negativo; así,

$\frac{z}{x^2}$ es funcion de -1 dimension, $\frac{x+z}{x^4+z^4}$ de -3, $\frac{1}{x^5+ax^3z^2}$ de -5.

Muchas funciones homogéneas del mismo número de dimensiones, sumadas ó restadas, deben dar tambien una funcion homogénea de un mismo número de dimensiones; así, esta expresion $ax+\frac{bz^2}{x}+\frac{ex^4-dz^4}{x^2z+xz^2}$ será una funcion de una sola dimension; y esta $a+\frac{bx}{z}+\frac{cz^2}{bx^2}+\frac{x^2+z^2}{x^2-z^2}$ es una funcion de ninguna dimension.

430 *La naturaleza de las funciones homogéneas tambien se extiende á las expresiones irracionales*; pues si P fuese una funcion qualquiera homogénea de n dimensiones, por exemplo, entonces $\sqrt{P}$ seria funcion de $\frac{1}{2}n$ dimensiones; $\sqrt[3]{P}$ de $\frac{1}{3}n$ dimensiones; y en general $P^{\frac{p}{q}}$ será una funcion de $\frac{p}{q}\times n$ dimensiones. Así, $\sqrt{x^2+z^2}$ es funcion de una dimension; $\sqrt[3]{x^9+z^9}$ de tres; $(x^2+z^2)^{\frac{3}{4}}$ será de $\frac{3}{4}\times 2$ dimensiones ó de $\frac{3}{2}$ dimensiones; y $\frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^4+z^4}}$ será funcion de ninguna dimension.

431 Las funciones heterogéneas se pueden subdividir por la multiplicidad de las dimensiones que ocurren en ellas. Así, funcion *bifida* es la que se compone del agregado de dos funciones homogéneas, cuyo número de dimensiones no es el mismo; así, $x^5+2x^3z^2+x^2+z^2$ será funcion bifida, porque parte contiene cinco dimensiones, y parte dos. Funcion *trifida* es aquella en que hay tres diversos números de dimensiones, ó que se puede dividir en tres funciones homogéneas, como $x^6+z^6+x^2z^2+z^4+x-z$.

432 Quando á una expresion algebráica se le da una nueva forma, se dice que se ha executado una *transformacion*. De donde se deduce que quando á una funcion se le da una nueva forma, se dice igualmente que se ha executado una *transformacion*.

Las transformaciones que se pueden dar á las funciones son de dos modos: ó introduciendo una nueva variable ó conservando la misma. Así, si en vez de $2-3x+x^2$ se pone $(1-x)(2-x)$, ó $(a+x)^3$ en vez de $a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$, ó $\frac{a}{a-x}+\frac{a}{a+x}$ en vez de $\frac{2a^2}{a^2-x^2}$, tenemos transformadas las funciones en otras en que se conserva la misma variable, pero baxo otra forma. Muchas son las transformaciones de esta especie que se pueden dar á una funcion; pero siempre hay una que

es mas á propósito para una investigacion particular; por cuyo motivo conviene elegir la forma mas cómoda.

433 El otro modo de transformacion por el qual en vez de la cantidad variable x se introduce otra cantidad variable z, que tenga á la verdad con x cierta relacion, se dice que se hace por *substitucion*, en cuyo caso conviene proceder de manera que la funcion propuesta se exprese mas sucintamente; como si se propusiese esta funcion de x,

$$a^4-4a^3x+6a^2x^2-4ax^3+x^4,$$

si en vez de $a-x$ se pone z, resultará esta funcion z^4 mucho mas sencilla; y si se tiene esta funcion irracional $\sqrt{a^2+x^2}$ de x, resultará que suponiendo $x=\frac{a^2-z^2}{2z}$,

dicha funcion expresada por z se hará racional é $=\frac{a^2+z^2}{2z}$.

434 Para indicar que una cantidad es funcion de otra, se pone delante de la variable una $f.$, $F.$ ó $\varphi.$; así, $z=f.x$, $z=F.x$ y $z=\varphi.x$ indican que z es funcion de x; pero quando se quiere indicar la funcion de una cantidad ya compuesta de la variable se encierra dentro de un paréntesis; así, $f.(x^2)$ ó $f.(a+bx)$&c. expresan funciones de x^2 y de $a+bx$&c. Para señalar una funcion de dos variables x,u, *independientes*, esto es, que variando la una no sea indispensable el que varíe la otra, se escribe $F.(x,u)$, y así de las demas variables. En algunas ocasiones se suelen afectar las expresiones de dos ó mas signos de funcion; así, $F.[f.(x,u)]$ expresa que una cierta combinacion de las variables x,u con constantes expresada por $f.$, se ha de combinar despues en masa de un modo qualquiera expresado por $F.$ Siempre que se empleen otras características, se advertirá.

435 *Quando el primer miembro de una equacion es una funcion y el segundo una transformacion suya, si todo lo que hay en el segundo miembro se pasa al primero, se verificará que todos los coeficientes de las diferentes potencias de las variables serán cero.*

En efecto, supongamos que $X=f.x$, y que esta equacion se transforme en otra que no contenga radicales ni divisores; vamos á demostrar que pasando al primer miembro todo lo que pueda haber en el segundo, la funcion vendrá á tener esta forma

$$a+bx+cx^2+dx^3+\&c.=0, \text{ y será } a=0, b=0, c=0, d=0, \&c.$$

Para convencernos de esto, observaremos que no habiendo ya radicales ni divisores, lo mas que podrá suceder es que haya un término donde no se halle x, otro donde esté elevada á la primera potencia, otro donde se encuentre á la segunda, y así sucesivamente; luego tendrá la forma que le hemos dado; pero como esta equacion se debe verificar, qualquiera que sea el valor de x, ó permaneciendo indeterminado dicho valor, ningun término se debe destruir ni por los que le

preceden ni por los que le siguen; luego será cada uno de ellos cero; y como la x debe ser una cantidad qualquiera, resulta que será cero cada término por serlo su coeficiente.

Aunque esta demostracion no dexa nada que desear, no obstante como esta proposicion es el principio en que estriba toda la teoría que vamos á exponer, haremos aun mas sensible su demostracion. La proposicion está reducida á probar que si en una funcion de una variable tal como x, despues de haber hecho ciertas operaciones se convierte en una equacion de esta especie $a+bx+cx^2+dx^3+\&c.=0$,
donde $a,b,c,d,\&c.$ tienen valores constantes, é independientes por consiguiente de x que es variable, y puede tener todos los valores que se quiera, los coeficientes $a,b,c,d,$ &c. son iguales con cero. En efecto, pues que los valores de $a,b,$ &c. son independientes de x, el valor que tenga a en un cierto valor de x, le tendrá en todos; pero si se supone $x=0$, la equacion se convierte en $a=0$; luego el primer coeficiente es cero, y por lo mismo la equacion primitiva se convertirá en

$$0+bx+cx^2+dx^3+\&c.=0, \text{ ó en } bx+cx^2+dx^3+\&c.=0,$$

que dividiendo ambos miembros por x se tendrá

$$b+cx+dx^2+\&c.=\frac{0}{x}=0;$$

y como b es tambien independiente de x, el valor que tenga en un valor particular de x, le tendrá en todos; pero si $x=0$, la equacion se convierte en $b=0$; luego el segundo coeficiente tambien es cero, y por lo mismo la equacion primitiva se convertirá en

$$0+0x+cx^2+dx^3+\&c.=0 \text{ ó en } cx^2+dx^3+\&c.=0,$$

que dividiendo por x^2 se convierte en $c+dx+\&c.=0$;
y como c tambien es independiente de x, el valor que tenga en un caso particular, le tendrá en todos; y como haciendo $x=0$, resulta $c=0$, tambien tenemos que el tercer coeficiente es cero; y así sucederá con los demas.

Esta proposicion es de suma importancia en el desarrollo de las funciones; pues quando se trata de esto, como el método analítico consiste en tomar conocido lo mismo que se busca para conocerlo despues, se supone la funcion ya desenvuelta, poniendo indeterminadas las cantidades que afectan á la variable, y despues por los métodos conocidos se hacen desaparecer todos los divisores y radicales si los hay; se pasan todas las cantidades á un solo miembro, y como paraque se verifique esta condicion se necesita que todos los coeficientes sean cero, se forman tantas equaciones como coeficientes hay, y por medio de ellas se determinan las cantidades indeterminadas que afectaban á la variable en el desarrollo supuesto de la funcion; y substituyendo sus valores se tendrá el desarrollo efectivo.

436 De aqui resulta que si *se tiene una equacion de esta forma*

$$a+bx+cx^2+\&c.=A+Bx+Cx^2+\&c.$$

se verificará que los coeficientes de los términos homólogos serán iguales en cada miembro, y será $A=a, B=b, C=c, \&c.$ porque si trasladamos todos los términos del segundo miembro al primero, se tendrá $\left.\begin{matrix} a+b \\ -A-B \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} +c \\ -C \end{matrix}\right\} x^2+\&c.=0,$ que en virtud de lo acabado de exponer se tendrá $a-A=0, b-B=0, c-C=0, \&c.=0$; que dan $a=A, b=B, c=C, \&c.$

Descomposicion de las funciones quebradas en sus funciones simples.

437 Quando se tienen dos ó mas funciones quebradas reunidas por via de suma ó resta, las podemos reducir á una sola dándoles un mismo denominador, y sumando ó restando sus numeradores; en cuyo caso la nueva funcion que se origina tiene por denominador el producto de los denominadores de las simples. En muchas ocasiones ocurre el tener que resolver la qüestion inversa, á saber, *el querer determinar las fracciones simples de que ha resultado una fraccion dada cuyo denominador tenga factores*, por lo que formará esto ahora el asunto de nuestras investigaciones.

Para esto, debemos observar ante todas cosas que supondremos que la funcion quebrada propuesta es genuina; pues en caso de no serlo, dividiríamos su numerador por el denominador, hasta que nos resultase una resta en que la mayor dimension de la variable fuese menor que la mayor en el denominador; y entonces tendríamos descompuesta la funcion quebrada expuria, en una parte entera y en otra quebrada genuina, que tendria por numerador la resta y por denominador el denominador de la propuesta.

Así, si tubiésemos la funcion $\frac{x^3+1}{x-1}$

la reduciríamos por medio de la division á $x^2+x+1+\frac{2}{x-1}$.

Quando las funciones que se dan para reunir en una sean genuinas, la que resulte de su suma ó resta tambien lo será; porque teniendo los numeradores menor dimension que los denominadores, despues de multiplicados ambos términos por el producto de los denominadores de los demas, quedará aun genuina cada funcion componente, y por lo mismo lo será la compuesta. Recíprocamente, si la funcion compuesta que se da es genuina, lo serán tambien todas las componentes.

Entendido esto, solo pueden ocurrir quatro casos en esta qüestion: 1.º el que los factores del denominador sean desiguales entre sí; 2.º que sean todos iguales entre sí; 3.º que unos sean iguales entre sí y otros no; y 4.º que el denominador no tenga factores reales sino de 2.º grado.

Sea, por exemplo, la funcion quebrada genuina $\frac{f.x}{F.x}$, si suponemos que los factores del denominador $F.x$ sean $x-\alpha, x-\beta, x-\gamma, x-\delta$, &c. se tendrá que se nos convertirá en $\frac{f.x}{F.x}=\frac{f.x}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ \&c.}$

y podremos suponer que resulta de tantas fracciones simples quantos sean los factores del denominador; y como los numeradores no los conocemos, y no deben contener á x, pues entonces serian estos quebrados funciones espurias, los señalaremos con las letras A, B, C, D, &c. y será

$$\frac{f.x}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{x-\gamma}+\frac{D}{x-\delta}+\&c.$$

cuya equacion se nos convierte multiplicando ambos miembros por el denominador $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$

en $f.x=A(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots+B(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots$
$+C(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)\ldots+D(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots+\&c.$

Ahora, en esta equacion x puede tener todos los valores que se quiera, pues es variable, y A, B, C, D, &c. son cantidades indeterminadas, pero constantes é independientes de x; luego el valor que tengan en un valor particular de x, le tendrán en todos los demas; pero si suponemos $x=\alpha$, tendremos $f.\alpha=A(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots$

porque en todos los demas términos entra el factor $x-\alpha=\alpha-\alpha=0$;

luego despejando tendremos $A=\frac{f.\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots}$

Si suponemos $x=\beta$ se nos convertirá la misma equacion en

$f.\beta=B(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\ldots$ que da $B=\frac{f.\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\ldots}$

y del mismo modo hallaríamos que $C=\frac{f.\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)\ldots}$

lo que suministra esta regla para la práctica: *el numerador correspondiente á un factor qualquiera es igual á un quebrado cuyo numerador es el de la primitiva, substituyendo en él en vez de la variable el valor que se saca para esta de igualar con cero dicho factor; y el denominador es igual á todo lo demas del denominador de la propuesta, substituyendo en él el mismo valor de la variable.*

Así, si la funcion fuese $\frac{1+x^2}{x-x^3}$

como los factores del denominador son (*) x, $1+x$, y $1-x$, podre-

(*) *Como hemos visto en la teoría de las equaciones que el hallar las raices está reducido á encontrar los factores por qué se puede dividir*

mos suponer que $\frac{1+x^2}{x-x^3}=\frac{1+x^2}{x(1+x)(1-x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{1+x}+\frac{C}{1-x}$;

y la regla nos dará $A=\frac{1+0^2}{(1+0)(1-0)}=\frac{1}{1}=1$;

$B=\frac{1+(-1)^2}{-1\times[1-(-1)]}=\frac{1+1}{-1\times2}=\frac{2}{-2}=-1$; y $C=\frac{1+1^2}{1\times2}=\frac{2}{2}=1$;

luego tendremos $\frac{1+x^2}{x-x^3}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$.

Si la funcion propuesta fuese $\frac{x^2}{x^3+2x^2-x-2}$

como los factores del denominador son $x+1, x-1, x+2$, tendremos que

$$\frac{x^2}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2};$$

y la regla nos dará $A=\frac{(-1)^2}{(-1-1)(-1+2)}=\frac{1}{-2\times1}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$;

$B=\frac{1^2}{(1+1)(1+2)}=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{6}$; $C=\frac{(-2)^2}{(-2+1)(-2-1)}=\frac{4}{-1\times-3}=\frac{4}{3}$;

por lo que $\frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x+2)}=\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{6}}{x-1}+\frac{\frac{4}{3}}{x+2}=\ldots$

$$-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{6(x-1)}+\frac{4}{3(x+2)}.$$

438 Supongamos ahora que los factores de $F.x$ sean todos iguales entre sí é iguales con $(x-\alpha)$, y tendremos llamando n al número de factores que $F.x=(x-\alpha)^n$, por lo que $\frac{f.x}{F.x}=\frac{f.x}{(x-\alpha)^n}$;

y la descompondremos en esta forma

$$\frac{f.x}{(x-\alpha)^n}=\frac{A}{(x-\alpha)^n}+\frac{B}{(x-\alpha)^{n-1}}+\frac{C}{(x-\alpha)^{n-2}}+\ldots.\frac{L}{(x-\alpha)};$$

cuya equacion despues de multiplicada por $(x-\alpha)^n$, se convertirá en otra en que comparando los coeficientes de los términos homólogos resultarán los valores de A, B, C, D, &c.

En efecto, supongamos que la fraccion sea la $\frac{x}{(x-\alpha)^3}$,

---

su primer miembro, resulta que si queremos hallar los factores de un polinomio qualquiera no tenemos mas que igualarle con cero, y resolver esta equacion.

y tendremos $\frac{x}{(x-\alpha)^3}=\frac{A}{(x-\alpha)^3}+\frac{B}{(x-\alpha)^2}+\frac{C}{x-\alpha}$;

y multiplicando por $(x-\alpha)^3$ será $x=A+B(x-\alpha)+C(x-\alpha)^2$ ó executando las operaciones y ordenando

$$x=\begin{array}{l}A+Bx+Cx^2\\ -B\alpha-2\alpha Cx\\ +C\alpha^2\end{array}$$

que comparando los coeficientes de los términos homólogos [436] se tendrá $C=0$, porque en el primer miembro no habiendo término donde se halle x^2, su coeficiente es cero; $B-2\alpha C=1$, porque el coeficiente del término donde se halla x en el primer miembro es 1, de donde sale $B=1$ por ser $C=0$, y finalmente $A-B\alpha+C\alpha^2=0$, porque en el primer miembro no hay término independiente de x; de donde $A=B\alpha=\alpha$, luego se tendrá $\frac{x}{(x-\alpha)^3}=\frac{\alpha}{(x-\alpha)^3}+\frac{1}{(x-\alpha)^2}$.

Aqui hemos empezado comparando los coeficientes de los términos últimos, porque eran los que nos suministraban con mas sencillez el despejo de las cantidades A,B,C; en otros casos se procede al contrario.

Debemos manifestar aqui porque se ha de suponer la descomposicion que hemos empleado, y no otra; con cuyo objeto observaremos que si se nos propusiese la funcion $\frac{a+bx}{(x-\alpha)^2}$, no la podríamos suponer descompuesta en estas dos $\frac{A}{x-\alpha}$, $\frac{B}{x-\alpha}$,

porque en este caso tendríamos $\frac{a+bx}{(x-\alpha)^2}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\alpha}$, que multiplicando por $(x-\alpha)^2$ resultaria

$$a+bx=A(x-\alpha)+B(x-\alpha)=\begin{array}{l}-A\alpha+Ax\\ -B\alpha+Bx\end{array}$$

que da $A+B=b$, de donde $A=b-B$,
y los primeros términos darán $a=-A\alpha-B\alpha=-b\alpha+B\alpha-B\alpha=-b\alpha$, que no da medios para despejar B, y esta equacion solo determina una relacion entre a,b y α; y como estas pueden tener en diferentes qüestiones los valores que se quiera, se sigue que no se puede suponer dicha descomposicion.

Tampoco se puede suponer que $\frac{a+bx}{(x-\alpha)^2}=\frac{A}{(x-\alpha)^2}+\frac{B}{x-\alpha}+\frac{C}{x-\alpha}$,
porque multiplicando por $(x-\alpha)^2$,
se tendrá

$$a+bx=A+B(x-\alpha)+C(x-\alpha)=\begin{array}{l}A+Bx\\ -B\alpha+Cx\\ -C\alpha\end{array}$$

la qual daria solo dos equaciones por cuyo medio no se pueden deter-

minar tres incógnitas A,B,C; y aunque supusiéramos que $A=1$, como tendríamos entonces $B+C=b$, y $1-(B+C)\alpha=a$,
resultaria de la primera $B=b-C$,
cuyo valor substituido en la segunda, la reduciria á
$$1-(b-C+C)\alpha=a, \text{ ó á } 1-b\alpha=a$$
que no da valor para C, y solo sí una relacion entre b,α y a, que no se puede suponer que la tengan; luego esta descomposicion tampoco se puede admitir, y como con los factores del denominador no se puede formar otro género de combinaciones, resulta que solo se podrá suponer la descomposicion $\frac{a+bx}{(x-\alpha)^2}=\frac{A}{(x-\alpha)^2}+\frac{B}{x-\alpha}$,
que es la misma que hemos supuesto.

439 El tercer caso que ocurre es quando la $F.x$ tiene factores iguales entre sí y factores desiguales; en este caso, primero se halla lo correspondiente á los iguales, y luego á los desiguales en esta forma.

Supongamos que se nos dé la fraccion $\frac{x^2}{(1-x)^2(2+x)(3-x)}$, haremos para mayor sencillez $x^2=M$, y $(2+x)(3-x)=N$, con lo que la funcion propuesta se convertirá en $\frac{M}{N(1-x)^2}$.

Ahora, á causa del factor $(1-x)^2$ nos vendrán por el caso anterior dos fracciones de esta forma $\frac{A}{(1-x)^2}+\frac{B}{1-x}$;
y si llamamos P al numerador de la fraccion que corresponda á la otra parte del denominador N, se tendrá $\frac{M}{N(1-x)^2}=\frac{A}{(1-x)^2}+\frac{B}{1-x}+\frac{P}{N}$,
que multiplicando por $N(1-x)^2$ será $M=AN+BN(1-x)+P(1-x)^2$,
de donde despejando P sale $P=\frac{M-AN-BN(1-x)}{(1-x)^2}$.

Ahora, P debe ser una funcion entera de x, pues si tubiese x en su denominador, la funcion $\frac{P}{N}$ tendria mas dimensiones en el denominador que las que tubiese N; lo que no puede ser porque $\frac{P}{N}$ es la funcion que resulta de todos los factores desiguales del denominador primitivo; luego será necesario que el numerador de la expresion de P sea divisible por $(1-x)^2$ ó por $1-x$; luego la parte $M-AN$ será divisible por $1-x$, y por lo mismo tendrá esta forma $M-AN=(1-x)Q$; ahora, el valor que tenga A en un valor particular de x, le tendrá en todos; luego le podremos dar á x el valor que nos suministre una equa-

cion para determinar A; y como haciendo $x=1$, el segundo miembro se reduce á 0, tendremos $M-AN=0$, de donde $A=\frac{M}{N}$; luego si en los valores de M y de N substituimos 1 en vez de x, que es el valor que reduce á cero el denominador del factor igual, se tendrá determinado el primer numerador A, y será $A=\frac{1^2}{(2+1)(3-1)}=\frac{1}{3\times 2}=\frac{1}{6}$.

Ahora, para despejar B tendremos que como todo el numerador de P ha de ser divisible por $1-x$, quando $x=1$ se reducirá á cero, y dará $M-AN-BN(1-x)=0$, de donde despejando B dará $B=\frac{M-AN}{N(1-x)}$.

Como $M-AN$ ha de ser divisible por $1-x$, se reducirá á cero quando $x=1$ ó $1-x=0$, en cuyo caso la fraccion se nos convierte en $\frac{0}{0}$, que no nos da medios para determinar á B; para obviar este inconveniente, no supondremos que $x=1$, hasta haber hecho desaparacer arriba y abaxo el factor $1-x$, y así tendremos que

$$B=\frac{M-AN}{(1-x)N}=\frac{x^2-\frac{1}{6}(2+x)(3-x)}{(1-x)(2+x)(3-x)}=\frac{\frac{6x^2-(2+x)(3-x)}{6}}{(1-x)(2+x)(3-x)}=$$

$$\frac{6x^2-6-3x+2x+x^2}{6(1-x)(2+x)(3-x)}=\frac{7x^2-x-6}{6(1-x)(2+x)(3-x)}=\frac{-6-x+7x^2}{6(1-x)(2+x)(3-x)}=$$

$$\frac{(-6-7x)(1-x)}{6(1-x)(2+x)(3-x)}=\frac{-6-7x}{6(2+x)(3-x)};$$

en cuyo valor substituyendo ahora 1 en vez de x, será

$$B=\frac{-6-7}{6(2+1)(3-1)}=\frac{-13}{6\times 3\times 2}=\frac{-13}{36};$$

por lo que se tendrá $\frac{x^2}{(1-x)^2N}=\frac{1}{6(1-x)^2}-\frac{13}{36(1-x)}+\frac{P}{N}$.

Ahora, como $N=(2+x)(3-x)$, los otros dos quebrados que estan contenidos en $\frac{P}{N}$, tendrán esta forma $\frac{C}{2+x}$ y $\frac{D}{3-x}$, cuyos numeradores encontraremos por la regla general dada [437] para los factores desiguales; y será $C=\frac{(-2)^2}{(1--2)^2(3--2)}=\frac{4}{3^2\times 5}=\frac{4}{45}$, y $D=\frac{3^2}{(1-3)^2(2+3)}=\frac{9}{4\times 5}=\frac{9}{20}$; luego será

$$\frac{x^2}{(1-x)^2(2+x)(3-x)}=\frac{1}{6(1-x)^2}-\frac{13}{36(1-x)}+\frac{4}{45(2+x)}+\frac{9}{20(3-x)}.$$

Si la funcion fuese $\frac{1}{x^3(1-x)^2(1+x)}$, primero indagaríamos las fracciones correspondientes al factor x^3, luego las del $(1-x)^2$, y luego la del $1+x$, y hallaríamos por último que

$$\frac{1}{x^3(1-x)^2(1+x)}=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{1}{2(1-x)^2}+\frac{7}{4(1-x)}-\frac{1}{4(1+x)}.$$

440 Finalmente nos propondremos para manifestar el quarto caso la funcion $\frac{x^2}{x^4+1}$, en que los factores del denominador son [383]

$x^2-x\sqrt{2}+1$ y $x^2+x\sqrt{2}+1$;

por lo que haremos $\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x\sqrt{2}+1}$

cuyas funciones quedarán aun genuinas, aunque en el numerador se halle x con una dimension.

Multiplicando por $x^4+1=(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)$, esta equacion se convertirá en

$$x^2=(Ax+B)(x^2+x\sqrt{2}+1)+(Cx+D)(x^2-x\sqrt{2}+1)= \ldots$$

$$\begin{array}{llll} Ax^3 & +Bx^2 & +B\sqrt{2}\times x & +B \\ & +A\sqrt{2}\times x^2 & +Ax & +D \\ +Cx^3 & +Dx^2 & -D\sqrt{2}\times x & \\ & -C\sqrt{2}\times x^2 & +Cx & \end{array}$$

que igualando los coeficientes de los términos homólogos, será $B+D=0$, que da $B=-D$;
tambien los coeficientes de x^3 dan $A+C=0$, de donde $A=-C$;
el de x da $B\sqrt{2}+A-D\sqrt{2}+C=0$, que en virtud de ser $A+C=0$, se convierte en $B\sqrt{2}-D\sqrt{2}=0$, que da $B=\frac{D\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=D$;
cuyo resultado no se puede verificar con el de $B=-D$, á no ser que $B=0$ y $D=0$; finalmente los coeficientes de x^2 dan
$B+A\sqrt{2}+D-C\sqrt{2}=1$,
que substituyendo A en vez de $-C$ y suprimiendo la B y la D, será $2A\sqrt{2}=1$ que da $A=\frac{1}{2\sqrt{2}}$;

y como $A=-C$ ó $C=-A$, será $C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$;

luego se tendrá $\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{\frac{x}{2\sqrt{2}}}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{\frac{x}{2\sqrt{2}}}{x^2+x\sqrt{2}+1}$.

Si la funcion propuesta fuese $\frac{1}{x^8+x^7-x^4-x^3}$,

ó lo que es lo mismo $\frac{1}{x^3(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}$,

la supondríamos igual con

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x^3}+\frac{E}{x^2}+\frac{F}{x}+\frac{Gx+H}{x^2+1};$$

y para determinar los numeradores, las reduciríamos todas á un mismo denominador, y compararíamos los términos homólogos, lo que nos daria por último $A=\frac{1}{8}$, $B=\frac{1}{4}$, $C=\frac{9}{8}$, $D=-1$, $E=1$, $F=-1$, $G=-\frac{1}{4}$ y $H=-\frac{1}{4}$;

de manera que se tendria $\frac{1}{x^8+x^7-x^4-x^3}=\frac{1}{x^3(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}=$

$$\frac{1}{8(x-1)}+\frac{1}{4(x+1)^2}+\frac{9}{8(x+1)}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{x+1}{4(x^2+1)}.$$

Del desarrollo de las funciones en series infinitas.

441 No estando las funciones quebradas irracionales ni trascendentes de x comprendidas en la forma entera $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\&c.$ quando es finito el número de los términos, se buscan expresiones semejantes á esta, que se extiendan indefinidamente y que den á conocer el valor de una funcion ó quebrada ó irracional ó trascendente; pues la naturaleza de estas funciones parece que se entiende mejor si se expresan por una forma semejante, aunque *infinita*; porque tenemos una idea exâcta de lo que expresa cada término. Por esta causa se debe procurar dar á toda funcion una forma semejante, que paraque comprenda el desarrollo de todas, la podremos señalar por la expresion infinita

$$Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+Dx^{\delta}+\&c.$$

donde α, β, γ, δ, &c. pueden expresar números enteros ó quebrados, positivos ó negativos; á estas expresiones se les da el nombre de *series*.

Ahora, si quesiéramos decir lo que era *serie*, diríamos que era un *infinitinomio ó un polinomio de infinitos términos, por medio del qual se expresa el valor de una cantidad ó funcion que no le tiene cabal.* Quando los exponentes α, β, γ, δ, &c. son positivos y van creciendo, ó negati-

vos y van menguando, la serie se llama *ascendente*; quando son positivos y van menguando, ó negativos y van creciendo, se llama *descendente*; quando, dando valores particulares á x y á A, B, C, &c., los términos van disminuyendo, la serie se llama *convergente*; y quando los términos van creciendo la serie se llama *divergente*. Las únicas series que nos acomoda considerar son las convergentes; porque como el objeto con que se desenvuelve en serie una funcion, es el de formar idea de una cantidad cuyo valor no se percibe con claridad, y esto se hace por un número infinito de términos, es necesario que tomando cierto número de ellos tengamos valores aproxîmados á la cantidad ó funcion; y por lo mismo debe ser tal la serie que los términos que tengan despues de los que se consideran, sean de poca consideracion; lo que no se puede verificar siendo divergente la serie, pues entonces los que falten, como son en número indefinido y todos mayores que los que se toman, siempre valdrán mucho mas que los que se toman; y así, estas series no son á propósito para el intento.

Quando una serie es tal que un término qualquiera depende de alguno ó algunos de los que le preceden, se llama *recurrente*; si depende de uno se llama recurrente de *primer órden*; si de dos de *segundo órden*; si de tres de *tercero*, &c.; á la ley por medio de la qual se halla un término qualquiera en valores de los que le preceden, la llamó Moivre *escala de relacion*. Se dice que las series son *aritméticas de primer órden*, quando restado cada término del que le sigue dan todos una misma diferencia; por lo que toda progresion aritmética es una serie aritmética de primer órden; quando de executar estas restas se origina una progresion aritmética, entonces se dice que la serie tiene constantes sus *segundas diferencias*, y que es de *segundo órden*; del mismo modo se dice que son del tercero, quando las terceras diferencias son constantes; y en general del órden n quando son constantes las diferencias del órden n.

442 Para desenvolver en serie las funciones, Mercator usaba de la division; Neuton las desenvolvia por medio de la extraccion de raices; y Leibnitz presuponiendo la serie. Para desenvolver en serie la expresion $\frac{a}{a-x}$ por el método de Mercator, executaríamos la division de a por $a-x$, por las reglas dadas en la division algebráica, y hallaríamos que $\frac{a}{a-x}=1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}+\ldots\frac{x^{n-1}}{a^{n-1}}$; esta serie es ascendente, porque los exponentes de x son positivos y van creciendo; será convergente siempre que $x<a$, y será divergente siempre que $x>a$. El método de Neuton consiste en trasladar el denominador $a-x$ al numerador, mudando el signo al exponente, lo que da

$$\frac{a}{a-x}=a(a-x)^{-1}$$

en elevar la $a-x^1$ á la potencia *menos uno*, que da, segun diremos mas adelante, $\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^3}{a^4}+$ &c.

y en multiplicar despues esto por a, que da $\frac{a}{a-x}=a(a-x)^{-1}=$
$$a\left(\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^3}{a^4}+\&c.\right)=1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}+\&c.,$$
que es el mismo resultado que antes.

443 El método de Leibnitz consiste en presuponer la serie que ha de ser el desarrollo de la funcion, de modo que tenga coeficientes indeterminados; ó si la funcion es complicada tambien se supone que los exponentes lo sean, y despues determinarlos por las condiciones que se han de verificar. Este método, que es verdaderamente lo que se llama la *teoría de las series*, es el mas importante; pues aunque el de Neuton es interesante, no obstante quando las funciones son complicadas no es tan adequado, y ademas los principios en que estriba el método de Neuton estan fundados en la misma teoría de las series; se ve por otra parte que todo es analítico, pues consiste en suponer conocido lo mismo que se busca para conocerlo despues. Así, para desenvolver por este método la funcion $\frac{a}{a-x}$ en serie, supondremos que dicha funcion despues de desenvuelta sea la serie $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+$&c; donde los coeficientes A,B,C,D,&c. son cantidades indeterminadas: el conocer la forma de la serie no es muy dificultoso, pues lo mas que puede suceder es que, sino hay radicales, haya un término constante, otro en que la variable esté elevada á la primera potencia, otro en que se halle elevada á la segunda, y así sucesivamente. Si la serie debe tener ó no término constante se conoce inmediatamente, pues haciendo en la funcion $x=0$, si la funcion se reduce á cero no habrá en la serie término constante; sino se reduce lo habrá y será aquello en que se convierte la funcion suponiendo cero la variable. Así, haciendo $x=0$ en la funcion se convierte en $\frac{a}{a}=1$, y este es valor de A; si en alguno de los términos de la serie se debiese hallar la variable en el denominador, tambien lo indicaria la funcion primitiva; pues en este caso, haciendo cero la variable, el valor de la funcion deberia ser infinito. Sabiendo ya si hay término constante, quál es, y si hay términos en que se halle la variable en el denominador, y que tampoco hay radicales (lo que se conoce siempre que no haya radicales en la funcion, ó no haya mas que uno que es el que afecta á toda la funcion quando sea irracional) el desarrollo de la funcion no puede menos de estar comprendido en la serie de tér-

minos $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ &c; luego, pues que sabemos que la funcion $\frac{a}{a-x}$, desenvuelta, debe estar comprendida en $A+Bx+Cx^2+$&c. haremos $\frac{a}{a-x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+$&c.

Si esta serie es el valor de la funcion propuesta, quitando el denominador se tendrá

$$a=\begin{matrix}Aa+Bax+Cax^2+Dax^3+\&c.\\ -Ax-Bx^2-Cx^3-\&c.\end{matrix}$$

ahora podríamos pasar el segundo miembro al primero a, é igualarlo todo con cero de este modo: $\left\{\begin{matrix}Aa+Bax+Cax^2+Dax^3+\&c.\\ -a-Ax-Bx^2-Cx^3-\&c.\end{matrix}\right\}=0$

y como en una funcion de esta especie es indispensable que todos los coeficientes sean cero [435] tendremos

$$Aa-a=0, Ba-A=0, Ca-B=0, Da-C=0.$$

Por medio de estas quatro equaciones determinaremos los coeficientes $A, B, C, D,$&c. y dará la primera $Aa=a$ ó $A=1$; la segunda $Ba=1$ ó $B=\frac{1}{a}$; la tercera $Ca=B$ ó $C=\frac{B}{a}=\frac{\frac{1}{a}}{a}=\frac{1}{a^2}$; la quarta $Da=C$ ó $D=\frac{C}{a}=\frac{\frac{1}{a^2}}{a}=\frac{1}{a^3}$; y por analogía deducimos la ley de los demas; y así seria $E=\frac{1}{a^4}$; $F=\frac{1}{a^5}$ &c.; con lo que resulta que

$$\frac{a}{a-x}=1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^5}{a^5}+\ldots\frac{x^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

Para determinar los coeficientes no se necesita hacer precisamente igual con cero uno de los miembros, pues paraque se verifique la equacion

$$a=\begin{matrix}Aa+Bax+Cax^2+Dax^3+\&c.\\ -Ax-Bx^2-Cx^3-\&c.\end{matrix}$$

es indispensable que en ambos miembros los coeficientes de las potencias homólogas de la variable, sean iguales [436]; y así los igualaremos y será $a=Aa$, que da $A=\frac{a}{a}=1, Ba-A=0,$ porque en el primer miembro no hay término ninguno donde se halle x; y por la misma razon será $Ca-B=0, Da-C=0,$&c. que darian los mismos valores de $B, C, D,$&c. que antes. De este método usaremos porque es algo mas sencillo.

444 Si la funcion fuese $\frac{a}{\alpha+\beta x}$ la haríamos igual con

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+Gx^6+\&c.$$

porque hay término constante, y no se debe hallar la variable en el denominador; y seria $\frac{a}{\alpha+\beta x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\&c.$

que quitando el denominador será $a=A\alpha+B\alpha x+C\alpha x^2+D\alpha x^3+\&c.$
$+\beta Ax+\beta Bx^2+\beta C\,x^3+\&c.$

de donde resulta igualando los coeficientes de los términos homólogos $a=A\alpha$ ó $A=\frac{a}{\alpha}$; y haciendo iguales con cero los coeficientes de cada una de las potencias de x del segundo miembro, por no tener términos homólogos en el primero, será

$\alpha B+\beta A=0$, de donde $B=\frac{-\beta A}{\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}\times A=-\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{a}{\alpha}=-\frac{\beta a}{\alpha^2}$;

$\alpha C+\beta B=0.\ .\ .\ .\ .\ .\ C=\frac{-\beta B}{\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}\times B=-\frac{\beta}{\alpha}\times-\frac{\beta a}{\alpha^2}=\frac{\beta^2 a}{\alpha^3}$,

$\alpha D+\beta C=0.\ .\ .\ .\ .\ .\ D=\frac{-\beta C}{\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}\times C=-\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{\beta^2 a}{\alpha^3}=-\frac{\beta^3 a}{\alpha^4}$;

lo que manifiesta que si el coeficiente de un término qualquiera se llama P y el siguiente Q, se tendrá para determinar este la equacion

$$\alpha Q+\beta P=0 \text{ ó } Q=\frac{-\beta P}{\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}\times P;$$

cuya equacion manifiesta la escala de relacion. Comparando los exponentes de las β,α,x con el lugar que ocupa cada término en la serie, tendremos que llamando n el lugar que dicho término ocupa,

$\pm\frac{\beta^{n-1}a}{\alpha^n}x^{n-1}$ será la expresion que represente un término qualquiera, tomando el signo + quando n es ímpar y el — quando par; y tendremos $\frac{a}{\alpha+\beta x}=\frac{a}{\alpha}-\frac{a\beta}{\alpha^2}x+\frac{a\beta^2}{\alpha^3}x^2-\frac{a\beta^3}{\alpha^4}x^3\ldots\pm\frac{a\beta^{n-1}}{\alpha^n}x^{n-1}$.

Si la funcion fuese $\frac{a+bx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$, por las mismas razones de antes, la haremos igual con $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\&c.$
y quitando el denominador será

$$\begin{aligned}a+bx=A\alpha+B\alpha x+C\alpha x^2+D\alpha x^3+\&c.\\ +A\beta x+B\beta x^2+C\beta\,x^3+\&c.\\ +A\gamma x^2+B\gamma x^3+\&c.\end{aligned}$$

lo que da $A\alpha=a$, de donde $A=\frac{a}{\alpha}$;

$$B\alpha+A\beta=b.\ .\ .\ .\ B=\frac{b-A\beta}{\alpha}=\frac{b-\frac{a}{\alpha}\beta}{\alpha}=\frac{b\alpha-a\beta}{\alpha^2};$$

$$Cx+B\beta+A\gamma=0\ .\ .\ .\ C=\frac{-B\beta-A\gamma}{\alpha}=\frac{\frac{\beta a-b\alpha}{\alpha^2}\times\beta-\frac{a}{\alpha}\times\gamma}{\alpha}=$$

$$\frac{\frac{(\beta a-b\alpha)\beta-a\alpha\gamma}{\alpha^2}}{\alpha}=\frac{\beta^2a-b\alpha\beta-a\alpha\gamma}{\alpha^3},\&c.$$

y por último $\frac{a+bx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{a}{\alpha}+\frac{b\alpha-a\beta}{\alpha^2}x+\frac{\beta^2a-b\alpha\beta-a\alpha\gamma}{\alpha^3}x^2+\&c.$

Este resultado nos puede servir de fórmula para todas las funciones que tubiesen la misma forma; y así, si quisiéramos desenvolver la funcion $\frac{1+2x}{1-x-x^2}$ seria igual con la serie $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\&c.$
y á causa de $a=1, b=2, \alpha=1, \beta=-1, \gamma=-1$,
será $A=1, B=3, C=4, D=7, E=11, F=18, \&c.$

de donde resulta que $\frac{1+2x}{1-x-x^2}=1+3x+4x^2+7x^3+11x^4+18x^5+\&c.$

y se ve que el coeficiente de un término qualquiera equivale á la suma de los dos anteriores.

445 De aqui ya se puede colegir la naturaleza de las series infinitas en que se transforman las funciones quebradas; pues en ellas cada término se puede determinar por algunos de los precedentes, á saber, si el denominador de la funcion propuesta es $\alpha+\beta x$ resulta la serie

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots Px^n+Qx^{n+1}+Rx^{n+2}+\&c.$$

en que cada coeficiente Q dependerá solo del precedente P, de modo que sea $\alpha Q+\beta P=0$. Pero si el denominador fuese un trinomio $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ cada coeficiente R de la serie se determinará por los dos precedentes, de modo que sea $\alpha R+\beta Q+\gamma P=0$;
del mismo modo si el denominador fuese un quadrinomio como

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3,$$

cada coeficiente S de la serie se determinaria por medio de los tres precedentes R, Q y P por la equacion $\alpha S+\beta R+\gamma Q+\delta P=0$,
y así sucesivamente si el denominador fuese un quinomio, &c., &c.

446 Para la formacion de estas series se requiere que el término constante α del denominador no sea $=0$; pues siendo el primer término de la serie $A=\frac{a}{\alpha}$, en este caso tanto A como todos los siguientes serian infinitos.

Ahora, dividiendo los dos términos de la funcion quebrada por α, resultaria que el primer término del denominador seria la unidad. Luego despues de hecha esta transformacion tenemos que el desarrollo de toda

funcion quebrada estará reducido al de la $\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\&c.}{1-\alpha x-\beta x^2-\gamma x^3-\delta x^4-\&c.}$

En la qual se ponen negativos todos los demas términos del denominador, paraque sean positivos todos los términos de la serie que de ella se ha de originar. Por lo que si se supone que la serie recurrente originada de ella sea $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\&c.$ los coeficientes se determinarán de modo que se tendrá (M) donde se ve que cada coeficiente es igual al agregado de algunos múltiplos de los precedentes, junto con uno de los coeficientes del numerador; y como si el numerador no procede al infinito, esta adicion cesará, en este caso cada término se determinará por medio de los antecedentes por una ley constante. De manera que para todas las series de esta especie se podria dar la siguiente regla para hallar los coeficientes.

(M)
$A=a$
$B=\alpha A+b$
$C=\alpha B+\beta A+c$
$D=\alpha C+\beta B+\gamma A+d$
$E=\alpha D+\beta C+\gamma B+\delta A+e$
&c.

El primer coeficiente es igual con el primero del numerador; *el segundo se compone del primer término de la serie multiplicado por el coeficiente del segundo término del denominador, mas el segundo coeficiente del numerador*; *el tercero se compone del segundo multiplicado por el coeficiente del segundo término del denominador, mas el primero multiplicado por el coeficiente del tercer término del denominador, mas el coeficiente del tercer término del numerador*; y así en adelante hasta que ya no haya mas términos en el numerador, en cuyo caso *un coeficiente se compondrá del que le antecede multiplicado por el coeficiente del segundo término del denominador, mas el anterior multiplicado por el coeficiente del tercer término del denominador, mas el anterior á este multiplicado por el coeficiente del quarto término del denominador, &c.*; cuya ley se deberá tener presente si se quiere determinar la serie sin hacer el cálculo.

447 Si la funcion propuesta no fuese genuina, entonces sale interrumpida la ley de la serie; y así, si nos propusiéramos la funcion espuria $\frac{1+2x-x^3}{1-x-x^2}$, haciéndola igual con la serie $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.$, y quitando el denominador tendremos

$$\begin{aligned}1+2x-x^3=A&+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\&c.\\ &-Ax-Bx^2-Cx^3-Dx^4-Ex^5-\&c.\\ &\qquad-Ax^2-Bx^3-Cx^4-Dx^5-\&c.\end{aligned}$$

de donde $A=1$, $B-A=2$ ó . . . $B=2+A=2+1=3$,
$C-B-A=0$ ó . . $C=B+A=3+1=4$,
$D-C-B=-1$ ó $D=C+B-1=4+3-1=6$,
$E-D-C=0$ ó . $E=D+C=6+4=10$,
$F-E-D=0$ ó . $F=E+D=10+6=16$,
&c.

luego $\frac{1+2x-x^3}{1-x-x^2}=1+3x+4x^2+6x^3+10x^4+16x^5+26x^6+$ &c.
en la qual el quarto término $6x^3$ se exceptúa de la ley general con que un coeficiente se deduce de los otros dos, que es por la suma de ellos.
Esta fraccion reducida á genuina será $\frac{1+2x-x^3}{1-x-x^2}=x-1+\frac{2}{1-x-x^2}$,

que desenvolviendo en serie por la regla dada la fraccion $\frac{2}{1-x-x^2}$,
tendremos $A=2$; $B=1\times2+0=2$; $C=1\times2+2\times1=4$; $D=1\times4+1\times2=6$;
$E=1\times6+1\times4=10$; $F=1\times10+1\times6=16$; &c.

por lo que $\frac{1+2x-x^3}{1-x-x^2}=x-1+\frac{2}{1-x-x^2}=x-1+2+2x+4x^2+6x^3+$
$10x^4+16x^5+26x^6+$ &c. $=1+3x+4x^2+6x^3+10x^4+16x^5+26x^6+$ &c.
que es el mismo resultado que obtubimos antes.

448 Entre las series recurrentes merecen una particular atencion aquellas que se originan de una fraccion en que el denominador es una potencia. Así, si esta fraccion $\frac{a+bx}{(1-\alpha x)^2}=\frac{a+bx}{1-2\alpha x+\alpha^2x^2}$ se resuelve en serie

será $a\begin{matrix}+2\alpha a\\+b\end{matrix}\Big\} x\begin{matrix}+3\alpha^2a\\+2\alpha^2b\end{matrix}\Big\} x^2\begin{matrix}+4\alpha^3a\\+3\alpha^2b\end{matrix}\Big\} x^3\begin{matrix}+5\alpha^4a\\+4\alpha^3b\end{matrix}\Big\} x^4\begin{matrix}+\&c.\\+\&c.\end{matrix}\Big\}$;

en la que el coeficiente de la potencia x^n será $(n+1)\alpha^na+n\alpha^{n-1}b$.
Si se supone $\alpha=1$ y $x=1$, la serie se convierte en la progresion aritmética general $a+(2a+b)+(3a+2b)+(4a+3b)+(5a+4b)+$&c.
cuyas diferencias son constantes. Luego toda progresion aritmética es una serie recurrente. Pues si es $A+B+C+D+E+F+$&c.
una progresion aritmética, se tendrá [I. 286. 2.ª]
$C=2B-A$; $D=2C-B$; $E=2D-C$; $F=2E-D$ &c.

Si la fraccion fuese $\frac{a+bx+cx^2}{(1-\alpha x)^3}=\frac{a+bx+cx^2}{1-3\alpha x+3\alpha^2x^2-\alpha^3x^3}$ se transformaria en esta serie infinita

$$a\begin{matrix}+3\alpha a\\+b\end{matrix}\Big\} x\begin{matrix}+6a\alpha^2\\+3b\alpha\\+c\end{matrix}\Bigg\} x^2\begin{matrix}+10a\alpha^3\\+6b\alpha^2\\+3c\alpha\end{matrix}\Bigg\} x^3\begin{matrix}+15a\alpha^4\\+10b\alpha^3\\+6c\alpha^2\end{matrix}\Bigg\} x^4\begin{matrix}+\&c.\\+\&c.\\+\&c.\end{matrix}$$

en la que el coeficiente de la potencia x^n será
$\frac{(n+1)(n+2)}{1\times2}\alpha^na+\frac{n(n+1)}{1\times2}\alpha^{n-1}b+\frac{(n-1)n}{1\times2}\alpha^{n-2}c$.
Por lo que si se supone $\alpha=1$ y $x=1$, esta serie se convierte en una progresion aritmética general del segundo órden, cuyas diferencias segundas son constantes. De este modo se manifiesta que todas las series alge-

bráicas que por último tienen diferencias constantes, son series recurrentes cuya ley se determina por el denominador $(1-x)^n$.

449 Hasta aqui solo hemos considerado las series en que el primer término del denominador era constante; si esta circunstancia no se verificase, entonces se hallaria la variable en todos los términos del denominador, y podríamos sacarla fuera de un paréntesis; por lo que descompondríamos la fraccion propuesta en dos factores: uno que tubiese por numerador la unidad y por denominador la variable que está fuera del paréntesis, y el otro factor lo demas que quedase.

Así, si la fraccion fuese $\frac{a}{ax^3-x^4}$ la descompondríamos en $\frac{1}{x^3}\times\frac{a}{a-x}$;

y como $\frac{a}{a-x}=[\S\ 443]1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}+\&c.$

multiplicando este resultado por $\frac{1}{x^3}$ tendremos que

$$\frac{a}{ax^3-x^4}=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{ax^2}+\frac{1}{a^2x}+\frac{1}{a^3}+\frac{x}{a^4}+\frac{x^2}{a^5}+\frac{x^3}{a^6}+\frac{x^4}{a^7}+\&c.$$

450 Quando en las fracciones que se tratan de desenvolver en serie hay algunos coeficientes tales como a,b,c, &c. α,β,γ, &c. que son iguales con cero, la serie no suele proceder segun las potencias de los números naturales; entonces tambien se puede igualar con la serie indeterminada $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\&c.$; y luego al determinar los coeficientes, resultarán algunos iguales con cero; pero en este caso se necesitarán calcular muchos mas términos de la serie $A+Bx+Cx^2+\&c.$ para tener los que se necesitan para determinar la ley. Sea, por exemplo, la fraccion $\frac{1}{1-x^2}$; igualándola con $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.$

se tendrá $\frac{1}{1-x^2}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+Gx^6+\&c.$

que da
$$\begin{aligned}1=&A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+Gx^6+\&c.\\ &-Ax^2-Bx^3-Cx^4-Dx^5-Ex^6-\&c.\end{aligned}$$

de donde $A=1$; $B=0$; $C-A=0$ ó $C=A=1$; $D-B=0$ ó $D=B=0$; $E-C=0$ ó $E=C=1$; $F-D=0$ ó $F=D=0$; $G-E=0$ ó $G=E=1$;&c.

luego $\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+\&c.$

donde se ve que para calcular quatro términos de la serie que resulta de la fraccion, ha sido necesario formar siete de la serie indeterminada. Algunas veces se conoce á primera vista la ley que debe guardar la serie, pues esta se deduce de la que se observa en el denominador, com-

binada con la del numerador sino procede por saltos; y así, aquí fácilmente se conocia que pues no habia en el numerador ni denominador la potencia primera de x, la ley que seguiria la serie en sus exponentes seria la de la progresion aritmética 0,2,4,6,&c. y suponiéndolo hubiera resultado el cálculo mas sencillo; pues hubiéramos hecho

$$\frac{1}{1-x^2}=A+Bx^2+Cx^4+Dx^6+\&c.$$

que da $1=A+Bx^2+Cx^4+Dx^6+\&c.$
$\quad -Ax^2-Bx^4-Cx^6-\&c.$

de donde
$A=1; B-A=0$ ó $B=A=1; C-B=0$ ó $C=B=1; D-C=0$ ó $D=C=1;\&c.$

por lo que $\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\&c.$

como antes, y el resultado se ha sacado con mas sencillez.

Pero la misma análisis suministra medios para no pararse en adivinar la forma de la serie; pues entonces no solo se elige una serie de coeficientes indeterminados, sino que tambien se ponen indeterminados los exponentes y despues se determinan. Y así, la fraccion $\frac{1}{1-x^2}$ la igualaremos con la serie $Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+Dx^{m+3n}+\&c.$, lo que dará $\frac{1}{1-x^2}=Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+Dx^{m+3n}+\&c.$

y quitando el denominador se tendrá
$1=Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+Dx^{m+3n}+\&c.$
$\quad -Ax^{m+2}-Bx^{m+n+2}-Cx^{m+2n+2}-\&c.$

Al ordenar el producto del denominador por la serie indeterminada, parece deberia haber alguna dificultad por no saber quales han de ser los términos homólogos; pero reflexîonando que qualquiera que sea la ley que siga la serie, debe depender de la que hay en el denominador y en el numerador, el producto de dicha serie por el primer término del denominador le ordenaremos colocando los términos con el órden con que vayan saliendo; y luego el producto que resulte de multiplicar por el segundo término del divisor se correrá un lugar mas hácia la derecha, esto es, el primer término debaxo del segundo del producto anterior, &c., y así se continuaria corriendo un lugar hácia la derecha cada producto si hubiese mas términos en el denominador. Luego, los exponentes de los primeros términos de ambos miembros se igualan, se executa lo mismo con los segundos, &c., hasta tener tantas equaciones como cantidades habia indeterminadas en los exponentes, por cuyo medio se determinarán; y si en el primer miembro no hubiese bastantes

términos, se igualarán con cero los exponentes de los términos que en el segundo forman columna; y pasando á determinar los coeficientes despues, se tendrá de todo punto determinada la serie presupuesta.

Y así, para determinar las letras m y n que sirven de exponentes, igualaremos los de los dos primeros términos, y tendremos las dos equaciones siguientes $m=0, m+n=m+2$, que dan $m=0$ y $n=m+2-m=2$.

Los coeficientes A, B, C, &c. se determinarán como antes; y substituyendo los valores en la serie será $\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+$&c.

451 Toda serie, que es el desarrollo de una funcion, debe ser convergente ó no nos hace al caso para nada; porque las series divergentes cada vez nos van separando mas de la cantidad. Pero el ser convergente una serie solo se conoce quando á la variable se le dan valores particulares. Así es, que si en la serie ascendente anterior, x es menor que 1, la serie será tambien convergente; pero quando x sea mayor que 1 la serie será divergente, y entonces no se puede decir que hemos resuelto el problema, á no ser que encontremos la serie descendente que sea convergente quando $x>1$. Esto se consigue ordenando la funcion de diverso modo, esto es, al contrario de antes; y así, en vez de la funcion $\frac{1}{1-x^2}$ supondremos que se nos ha dado $\frac{1}{-x^2+1}$ que es lo mismo; y aqui es quando mas uso tienen los exponentes indeterminados; por lo que haremos

$$\frac{1}{-x^2+1}=Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+\text{\&c.}$$

quitando el divisor será $1=-Ax^{m+2}-Bx^{m+n+2}-Cx^{m+2n+2}-$&c.
$\qquad +Ax^m \qquad +Bx^{m+n} \qquad +$&c.

lo que da $m+2=0$ ó $m=-2$, $m+n+2=m$ ó $n=-2$;

$A=-1$; $B=A=-1$; $C=B=-1$ &c.

de manera que en este caso será $\frac{1}{-x^2+1}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^6}-$&c.

Por lo regular los exponentes de la variable en la serie siguen una ley, y en el exemplo anterior hemos supuesto que era la de formar una progresion aritmética; pero si en algun caso esto no basta se pondrán indeterminados todos los exponentes, señalándolos con una letra diferente, y se determinarán como acabamos de manifestar.

452 Si la funcion fuese $\sqrt{a^2-x^2}$, la haríamos igual con la serie

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{\&c.},$$

y elevando ambos miembros al quadrado tendremos

$$\begin{aligned} a^2-x^2=A^2+2ABx&+2ACx^2+2ADx^3+2AEx^4+\text{\&c.}\\ &+B^2x^2\ \ +2BCx^3+2BDx^4+\text{\&c.}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad +C^2x^4+\text{\&c.}\end{aligned}$$

de donde $A^2=a^2$ ó $A=\pm a$; $2AB=0$ ó $B=\frac{0}{2A}=0$;

$$2AC+B^2=-1 \text{ ó } 2AC=-1-B^2=-1, \text{ y}$$

$$C=-\frac{1}{2A}=\frac{-1}{2\times\pm a}=\frac{-1}{\pm 2a}=\mp\frac{1}{2a};$$

$$2AD+2BC=0 \text{ ó } 2AD=-2BC=-0, \text{ ó } D=\frac{-0}{2A}=-0;$$

$$2AE+2BD+C^2=0 \text{ ó } 2AE=-C^2-2BD=-C^2-0=-C^2, \text{ y}$$

$$E=-\frac{C^2}{2A}=-\frac{\left(\mp\frac{1}{2a}\right)^2}{2A}=-\frac{\frac{1}{4}a^2}{2\times\pm a}=-\frac{1}{\pm 8a^3}=\mp\frac{1}{8a^3};$$

y substituyendo en la serie será

$$\sqrt{a^2-x^2}=\pm a\mp\frac{x^2}{2a}\mp\frac{x^4}{8a^3}\mp \text{\&c.}$$

tambien se pudiera haber hecho uso de los exponentes indeterminados, y hubiéramos tenido $\sqrt{a^2-x^2}=Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+Dx^{m+3n}$&c. quitando el radical resultará

$$a^2-x^2=A^2x^{2m}+2ABx^{2m+n}+2ACx^{2m+2n}+2ADx^{2m+3n}+\text{\&c.}$$
$$+B^2x^{2m+2n}+2CBx^{2m+3n}+\text{\&c.}$$

y para determinar los exponentes tendremos

$2m=0, 2m+n=2$, lo que da $m=0$ y $n=2$;

en quanto á los coeficientes tendremos $A^2=a^2$, ó $A=\pm a$;

$$2AB=-1, \text{ ó } B=-\frac{1}{2A}=-\frac{1}{2\times\pm a}=-\frac{1}{\pm 2a}=\mp\frac{1}{2a};$$

$$2AC+B^2=0 \text{ ó } 2AC=-B^2=-\left(\mp\frac{1}{2a}\right)^2=-\frac{1}{4a^2} \text{ ó } C=-\frac{\frac{1}{4a^2}}{\pm 2a}=\mp\frac{1}{8a^3};$$

$$2AD+2BC=0 \text{ ó } D=-\frac{2BC}{2A}=-\frac{BC}{A}=-\dots$$

$$\frac{\mp\frac{1}{2a}\times\mp\frac{1}{8a^3}}{\pm a}=-\frac{\frac{1}{16a^4}}{\pm a}=\mp\frac{1}{16a^5};$$

y substituyendo en la serie será

$$\sqrt{a^2-x^2}=\pm a\mp\frac{x^2}{2a}\mp\frac{x^4}{8a^3}\mp\frac{x^6}{16a^5}\mp\text{\&c.}$$

de aqui resultan dos series, una tomando los signos superiores y otra tomando los inferiores; lo que en efecto debia verificarse á causa de que el radical debe tener dos valores; más para desenvolver esta clase de

funciones, y aun las quebradas cuyo denominador consta de pocos términos, el método mas elegante y sencillo es el de que usa Neuton; para lo qual sacaremos ante todas cosas, por las mismas series, la fórmula conocida con el nombre de *binomio de Neuton*.

453 En el Algebra hemos manifestado la forma que tenia la expresion $(a+x)^n$ quando n era un número entero positivo; ahora vamos á manifestar que el desarrollo es el mismo para quando es negativo ó quebrado.

Por lo que supondremos que se nos dé la funcion $(a+x)^r$ donde r sea un número entero ó quebrado, ya sea positivo ya negativo.

Supongamos primero que el exponente r sea un número entero que representaremos por n, y será la funcion que se trata de desenvolver $(a+x)^n$; como esta funcion no envuelve radicales ni exponentes fraccionarios, tendremos que en su desarrollo tampoco los habrá [443]; como si se hace $x=0$ la funcion se convierte en a^n, se ve que ha de tener el desarrollo un término independiente de x; lo que tambien manifiesta que no puede haber términos donde la x se halle en el denominador, pues si hubiese un término de esta forma $\frac{P}{x^p}$,
haciendo $x=0$ resultaria el desarrollo infinito; y como deberia ser este desarrollo igual con la funcion en este mismo caso, y sucede que la funcion es a^n, se deduce que no puede haber términos donde la x se halle con exponentes negativos ó en el denominador; luego todos los exponentes serán positivos; y por lo mismo todos los términos del desarollo estarán comprendidos en la serie indefinida

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+Gx^6+\&c.;$$

en la qual sabemos que $A=a^n$, porque es en lo que se convierte la funcion quando $x=0$; y así haremos $(a+x)^n=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.$; por la misma razon será la funcion semejante

$$(a+y)^n=A+By+Cy^2+Dy^3+\&c.;$$

donde se ve que los coeficientes $A,B,C,D,\&c.$ son independientes de las variables; y como las funciones convienen en todo, menos en la variable, deberán ser iguales en uno y otro desarrollo; y por lo mismo se han señalado con unas mismas letras.

Haciendo ahora $\left\{\begin{array}{l} a+x=u \\ a+y=z \end{array}\right\}$ (α) tendremos $\left\{\begin{array}{l} (a+x)^n=u^n \\ (a+y)^n=z^n \end{array}\right\}$

y por consiguiente $\left\{\begin{array}{l} u^n=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\&c. \\ z^n=A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4+\&c. \end{array}\right\}$ (6)

Restando esta equacion de la antecedente, y haciendo lo mismo con las (α),

se tendrá $\left\{\begin{array}{l} u^n-z^n=B(x-y)+C(x^2-y^2)+D(x^3-y^3)+E(x^4-y^4)\&c. \\ u-z=x-y \end{array}\right.$

dividiendo ahora por esta última su antecedente será

$$\frac{u^n-z^n}{u-z}=\frac{B(x-y)+C(x^2-y^2)+D(x^3-y^3)+E(x^4-y^4)+\&c.}{x-y}$$

Pero haciendo la division en el primer miembro [I. 186] resulta

$$u^{n-1}+u^{n-2}z+u^{n-3}z^2+u^{n-4}z^3+\&c. \; . \; . \; . \; z^{n-1};$$

y como por otra parte todos los términos del segundo miembro de esta equacion se pueden dividir por $x-y$, resulta que haciendo las operaciones indicadas en la equacion anterior tendremos

$$u^{n-1}+u^{n-2}z+u^{n-3}z^2+\ldots z^{n-1}=B+C(x+y)+D(x^2+xy+y^2)+\&c.$$

Haciendo ahora $x=y$, como resulta tambien de las equaciones (α) que $u=z$, todos los términos del primer miembro se reducen á u^{n-1}; y como hay $n-1$ términos en que se halla u, pues se debe hallar con todos los exponentes inferiores á $n-1$, y ademas hay uno donde no se halla la u, habrá n términos iguales con u^{n-1}; y tendremos que esta equacion se convertirá en $nu^{n-1}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+5Fx^4+6Gx^5+\&c.$

Pero en virtud de las equaciones (α), (β), se tiene

$$nu^{n-1}=\frac{nu^n}{u}=\frac{n(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.)}{a+x};$$

luego $\dfrac{n(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\&c.)}{a+x}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\&c.;$

y quitando el denominador resultará

$$n(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\&c.)=(a+x)(B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\&c.)$$

ó haciendo las operaciones será

$$nA+nBx+nCx^2+nDx^3+\&c.=aB+2aCx+3aDx^2+4aEx^3+\&c.$$
$$+\;Bx\;+2Cx^2\;+3Dx^3+\&c.$$

Igualando los coeficientes de los términos homólogos será $aB=nA=na^n$, pues sabíamos desde luego que el primer término era a^n,

de donde $B=\dfrac{na^n}{a}=na^{n-1}$;

$$2AC+B=nB \text{ ó } 2aC=nB-B=(n-1)B=n(n-1)a^{n-1},$$

ó $C=\dfrac{n(n-1)}{2}\times\dfrac{a^{n-1}}{a}=\dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$;

$3aD+2C=nC$ ó $3aD=nC-2C=(n-2)C=(n-2)\times\dfrac{n(n-1)}{2}.a^{n-2}$,

ó $D=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2\times3}a^{n-3}$;

$4aE+3D=nD$ ó $4aE=nD-3D=(n-3)D=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times3}a^{n-3}$,

de donde $E=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times3\times4}a^{n-4}$;

$5aF+4E=nE$, ó $5aF=nE-4E=(n-4)E=\ldots$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\times3\times4}a^{n-4};$$

de donde $F=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\times3\times4\times5}a^{n-5}$, &c.

luego substituyendo estos valores en la serie primitiva tendremos

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times3}a^{n-3}x^3+\ldots$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times3\times4}a^{n-4}x^4+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\times3\times4\times5}a^{n-5}x^5 \text{ \&c.}$$

454 Sea ahora el exponente r un quebrado que le expresaremos por $\frac{n}{m}$; y tendremos la expresion $(a+x)^{\frac{n}{m}}$, que como es igual á $\sqrt[m]{(a+x)^n}$, y hemos dicho que á la expresion $(a+x)^n$ le podemos dar esta forma $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$&c. será $(a+x)^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{\&c.}}$; pero sea qual fuere la expresion $A+Bx+Cx^2+$&c. como m es un número entero se tratará de extraer esta raiz de $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$&c. y como al extraer una raiz [I. 303], sea exâcta ó aproxîmada, siempre se extrae la del primer término, y despues se divide lo que sigue por el exponente de la raiz, multiplicado por una potencia de la raiz hallada, inferior en una unidad á la raiz que se va extrayendo: se sigue que como debaxo del radical la x no tiene exponentes fraccionarios, tampoco los tendrá en la serie que exprese el desarrollo. Por otra parte, como haciendo $x=0$ la equacion se convierte en $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{A}$, se sigue que en el desarrollo ha de haber un término constante ó independiente de x; y que por esta misma razon no puede haber término donde la variable se halle con exponente negativo, ó esté en el denominador; porque entonces quando $x=0$ deberia ser la expresion infinita, y aqui se ha visto que es $a^{\frac{n}{m}}$ ó $\sqrt[m]{A}$; luego el desarrollo de la expresion $\sqrt[m]{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{\&c.}}$ no podrá menos de estar comprendido en la forma

$A'+B'x+C'x^2+D'x^3+$&c., ó en la forma $a^{\frac{n}{m}}+B'x+C'x^2+D'x^3+$&c.;

luego se tendrá $(a+x)^{\frac{n}{m}}=a^{\frac{n}{m}}+B'x+C'x^2+D'x^3+E'x^4+$&c. (α'): y por lo mismo será la funcion semejante

$(a+y)^{\frac{n}{m}}=(a^{\frac{n}{m}}=A')+B'y+C'y^2+D'y^3+E'y^4+\&c.$ (β'),
donde los coeficientes B',C',D',&c. son los mismos que en la (α') por las razones dadas en el caso anterior; haciendo ahora

$(a+x)^{\frac{1}{m}}=u$,$(a+y)^{\frac{1}{m}}=z$ (γ') resultará $(a+x)^{\frac{n}{m}}=u^n$; $(a+y)^{\frac{n}{m}}=z^n$(δ');

restando estas dos expresiones se tendrá $u^n-z^n=(a+x)^{\frac{n}{m}}-(a+y)^{\frac{n}{m}}=$

$$a^{\frac{n}{m}}+B'x+C'x^2+D'x^3+\&c....-a^{\frac{n}{m}}-B'y-C'y^2-D'y^3-\&c.=$$
$$B'(x-y)+C'(x^2-y^2)+D'(x^3-y^3)+E'(x^4-y^4)+\&c. \ (\varepsilon').$$

Elevando á la potencia m las equaciones (γ') será $a+x=u^m$,$a+y=z^m$, y restándolas ahora será $u^m-z^m=a+x-a-y=x-y$;
luego si dividimos la (ε') por esta resultará

$$\frac{u^n-z^n}{u^m-z^m}=\frac{B'(x-y)+C'(x^2-y^2)+D'(x^3-y^3)+\&c.}{x-y};$$

pero [I. 186] $u^n-z^n=(u-z)(u^{n-1}+u^{n-2}z+u^{n-3}z^2+...z^{n-1})$
y $(u^m-z^m)=(u-z)(u^{m-1}+u^{m-2}z+u^{m-3}z^2+...z^{m-1})$,
luego si substituimos estos valores en la equacion anterior se tendrá

$$\frac{(u-z)(u^{n-1}+u^{n-2}z+u^{n-3}z^2+....z^{n-1})}{(u-z)(u^{m-1}+u^{m-2}z+u^{m-3}z^2+...z^{m-1})}=$$
$$\frac{B'(x-y)+C'(x^2-y^2)+E'(x^3-y^3)\&c.}{x-y};$$

y como tambien todos los términos del segundo miembro son divisibles por $x-y$, resulta que si hacemos la division y suprimimos en el primer miembro el factor $u-z$, será $\dfrac{u^{n-1}+u^{n-2}z+u^{n-3}z^2+...z^{n-1}}{u^{m-1}+u^{m-2}z+u^{m-3}z^2+..z^{m-1}}=$

$B'+C'(x+y)+D'(x^2+xy+y^2)+E'(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\&c.$ (η').
Ahora, haciendo $x=y$, como tambien en este supuesto resulta $u=z$ (porque entonces las equaciones (δ') dan $u^n=z^n$, y extrayendo la raiz n se tiene $u=z$) tendremos que todos los términos del numerador se convertirán en u^{n-1}, y los del denominador en u^{m-1}; y como en el primero habrá n términos por lo dicho en el caso anterior, y en el segundo m, tendremos que el primer miembro se convertirá en

$$\frac{nu^{n-1}}{mu^{m-1}}=\frac{nu^{n-1}u}{mu^{m-1}u}=\frac{nu^{n-1+1}}{mu^{m-1+1}}=\frac{nu^n}{mu^m},$$

y como el segundo se convierte en $B'+2C'x+3D'x^2+4E'x^3+\&c.$
resultará $\dfrac{nu^n}{mu^m}=B'+2C'x+3D'x^2+4E'x^3+\&c.$ (λ'),

ó multiplicando ambos miembros por u^m se tendrá

$$\frac{nu^n}{m}=u^m(B'+2C'x+3D'x^2+4E'x^3+\&c.)\ (\mu').$$

Substituyendo ahora en esta equacion en vez de u^n y u^m sus valores $(a+x)^{\frac{n}{m}}$ ó $a^{\frac{n}{m}}+B'x+C'x^2+D'x^3+\&c.$ y $(a+x)$, se tendrá despues de executar las operaciones $\frac{n}{m}a^{\frac{n}{m}}+\frac{n}{m}B'x+\frac{n}{m}C'x^2+\frac{n}{m}D'x^3+\&c.=$

$$\begin{array}{l} aB'+2aC'x+3aD'x^2+4aE'x^3+\&c. \\ \quad +B'x\ +2C'x^2\ +3D'x^3\ +\&c. \end{array}$$

que igualando los coeficientes de los términos homólogos se tendrá

$aB'=\frac{n}{m}a^{\frac{n}{m}}$, lo que da $B'=\frac{n}{m}\times\frac{a^{\frac{n}{m}}}{a}=\frac{n}{m}a^{\frac{n}{m}-1}$;

$2aC'+B'=\frac{n}{m}B'$ ó $2aC'=\frac{n}{m}B'-B'=\left(\frac{n}{m}-1\right)B'=\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)a^{\frac{n}{m}-1}$,

de donde $C'=\dfrac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)a^{\frac{n}{m}-1}}{2a}=\dfrac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)}{2}a^{\frac{n}{m}-2}$;

$3aD'+2C'=\frac{n}{m}C'$ ó $3aD'=\frac{n}{m}C'-2C'=\left(\frac{n}{m}-2\right)C'=\left(\frac{n}{m}-2\right)\dfrac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)}{2}a^{\frac{n}{m}-2}$,

de donde $D'=\dfrac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{n}{m}-2\right)}{2\times3}a^{\frac{n}{m}-3}$; $4aE'+3D'=\frac{n}{m}D'$,

ó $4aE'=\frac{n}{m}D'-3D'=\left(\frac{n}{m}-3\right)D'=\left(\frac{n}{m}-3\right)\dfrac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{n}{m}-2\right)}{2\times3}a^{\frac{n}{m}-3}$,

lo que da $E'=\dfrac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{n}{m}-2\right)\left(\frac{n}{m}-3\right)}{2\times3\times4}a^{\frac{n}{m}-4}$.

y substituyendo estos valores en la equacion (α') tendremos

$$(a+x)^{\frac{n}{m}}=a^{\frac{n}{m}}+\frac{n}{m}a^{\frac{n}{m}-1}x+\frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)}{2}a^{\frac{n}{m}-2}x^2+\ldots$$

$$\frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{n}{m}-2\right)}{2\times3}a^{\frac{n}{m}-3}x^3+\frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{n}{m}-2\right)\left(\frac{n}{m}-3\right)}{2\times3\times4}a^{\frac{n}{m}-4}x^4+\&c.$$

fórmula que tiene la misma forma que la anterior, solo que aqui el exponente es quebrado, y está representado por $\frac{n}{m}$, quando allí lo estaba solo por n; esta fórmula comprende á la otra haciendo en ella $m=1$.

455 Supongamos ahora que el exponente r esté representado por la fraccion $-\frac{n}{m}$, esto es, por un número negativo, ya sea entero ya quebrado, pues en $-\frac{n}{m}$ está comprendido el entero negativo siempre que se haga $m=1$, y tendremos que la expresion será $(a+x)^{-\frac{n}{m}}$; y como toda cantidad cuyo exponente es negativo debe hallarse en el denominador, con el mismo exponente positivo, será

$$(a+x)^{-\frac{n}{m}}=\frac{1}{(a+x)^{\frac{n}{m}}}=[\S 454]\ \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}+B'x+C'x^2+D'x^3+E'x^4+\&c.}$$

y como en el desarrollo de esta funcion no debe haber ningun exponente negativo ni fraccionario, y debe haber un término independiente de x que es $\frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}=a^{-\frac{n}{m}}$; tendremos que el desarrollo del segundo miembro estará comprendido en la expresion siguiente

$A''+B''x+C''x^2+D''x^3+\&c.$ ó en la $a^{-\frac{n}{m}}+B''x+C''x^2+D''x^3+\&c.$;

luego será $(a+x)^{-\frac{n}{m}}=a^{-\frac{n}{m}}+B''x+C''x^2+D''x^3+\&c.$ (α'').

Por las mismas razones será la funcion semejante

$(a+y)^{-\frac{n}{m}}=a^{-\frac{n}{m}}+B''y+C''y^2+D''y^3+E''y^4+\&c.$ (β''),

siendo B'', C'' &c. los mismos que los de la anterior (α''); haciendo ahora $(a+x)^{\frac{1}{m}}=u$, $(a+y)^{\frac{1}{m}}=z$ (γ'') resultará elevando á la potencia m que $a+x=u^m$, $a+y=z^m$ (δ''),

y dividiendo la unidad por ambos miembros y elevando á la potencia

n, será $\frac{1}{(a+x)^{\frac{n}{m}}}=\frac{1}{u^n}$, $\frac{1}{(a+y)^{\frac{n}{m}}}=\frac{1}{z^n}$ ó $(a+x)^{-\frac{n}{m}}=u^{-n}$, $(a+y)^{-\frac{n}{m}}=z^{-n}$

que restadas dan $(a+x)^{-\frac{n}{m}}-(a+y)^{-\frac{n}{m}}=u^{-n}-z^{-n}=\ldots$
$B''(x-y)+C''(x^2-y^2)+D''(x^3-y^3)+E''(x^4-y^4)+\&c.$ (ε'').
Executando lo mismo con las (δ'') será $u^m-z^m=a+x-a-y=x-y$ (η'').
y dividiendo la equacion (ε'') por esta resultará

$$\frac{u^{-n}-z^{-n}}{u^m-z^m}=\frac{B''(x-y)+C''(x^2-y^2)+D''(x^3-y^3)+E''(x^4-y^4)}{x-y}=$$
$$B''+C''(x+y)+D''(x^2+xy+y^2)+E''(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\&c.$$

Pero el primer miembro de esta equacion es igual con $\frac{\frac{1}{u^n}-\frac{1}{z^n}}{u^m-z^m}=$

$$\frac{\frac{z^n-u^n}{u^nz^n}}{u^m-z^m}=\frac{z^n-u^n}{u^nz^n(u^m-z^m)}=-\frac{u^n-z^n}{u^nz^n(u^m-z^m)}=-\frac{1}{u^nz^n}\times\frac{u^n-z^n}{u^m-z^m};$$

y como haciendo $z=u$ la expresion $\frac{u^n-z^n}{u^m-z^m}$ se convierte, como antes,

en $\frac{nu^{n-1}}{mu^{m-1}}$, será en este caso $\frac{u^{-n}-z^{-n}}{u^m-z^m}=-\frac{1}{u^nz^n}\times\frac{u^n-z^n}{u^m-z^m}=\ldots$

$$-\frac{1}{u^nu^n}\times\frac{nu^{n-1}}{mu^{m-1}}=-\frac{1}{u^{2n}}\times\frac{nu^n}{mu^m}=-\frac{n}{m}\times\frac{u^{n-2n}}{u^m}=-\frac{n}{m}\times\frac{u^{-n}}{u^m}$$

y como en este mismo caso es $x=y$, y el segundo miembro se convierte en $B''+2C''x+3D''x^2+4E''x^3+5F''x^4+\&c.$

resultará $-\frac{n}{m}\times\frac{u^{-n}}{u^m}=B''+2C''x+3D''x^2+4E''x^3+5F''x^4+\&c.$
ó quitando el divisor u^m será

$$-\frac{n}{m}u^{-n}=u^m(B''+2C''x+3D''x^2+4E''x^3+5F''x^4+\&c.)$$

ó poniendo en vez de u^{-n} y u^m sus valores $(a+x)^{-\frac{n}{m}}$, $a+x$, se tendrá

$$-\frac{n}{m}(a+x)^{-\frac{n}{m}}=(a+x)(B''+2C''x+3D''x^2+4E''x^3+5F''x^4+\&c.)$$

equacion que diferenciándose de la del caso anterior solo en el signo

del exponente $-\frac{n}{m}$ dará para B'',C'',D'',E'',&c. los mismos valores que se sacaron para B',C',D',E',&c. solo que se deberán mudar en estos los signos al $\frac{n}{m}$; luego queda probado en general que siendo r un número qualquiera entero, quebrado, positivo ó negativo, será la funcion

$$(a+x)^r=a^r+ra^{r-1}x+\frac{r(r-1)}{2}a^{r-2}x^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{2\times3}a^{r-3}x^3+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2\times3\times4}a^{r-4}x^4+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{2\times3\times4\times5}a^{r-5}x^5+\&c.$$

456 Esta forma no es la mas sencilla en la práctica, y así la pondremos baxo otro aspecto; para lo qual como a tiene por exponente en todos los términos menos en el primero una parte negativa, la pasaremos al denominador con dicho exponente positivo, y resultará que

$$(a+x)^r=a^r+ra^r\times\frac{x}{a}+\frac{r(r-1)}{1\times2}a^r\times\frac{x^2}{a^2}+\frac{r(r-1)(r-2)}{1\times2\times3}a^r\times\frac{x^3}{a^3}+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1\times2\times3\times4}a^r\times\frac{x^4}{a^4}+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{1\times2\times3\times4\times5}a^r\times\frac{x^5}{a^5}+\&c.$$

donde se advierte que esta es una serie recurrente, en que un término qualquiera *se compone del antecedente multiplicado por el quociente del segundo término del binomio partido por el primero, y multiplicado tambien por el exponente de la potencia menos tantas unidades como términos hay antes de él menos uno, y partido por el número de términos que hay antes*; así, el segundo término $ra^r\frac{x}{a}$ equivale al primero multiplicado por el quociente $\frac{x}{a}$ de la segunda parte partida por la primera, y multiplicado tambien por r, (esto es, por el exponente de la potencia sin quitarle nada, porque delante del primer término no hay ninguno) partido por 1 que son los términos que hay antes; de modo que llamando A al primer término a^r, resultará que el segundo término será igual con $rA\frac{x}{a}$; el tercer término se compone del segundo multiplicado por dicho quociente y por $\frac{r-1}{2}$, de modo que llamando B al segundo término, el tercero será $\frac{r-1}{2}B\frac{x}{a}$; y llamando C al tercero,

D al quarto, E al quinto &c. tendremos que $D = \frac{r-2}{3} C \frac{x}{a}$; el quinto $E = \frac{r-3}{4} D \frac{x}{a}$, &c; de modo que la forma mas sencilla para la práctica de la fórmula del binomio, es la siguiente

$$(a+x)^r = a^r + rA \frac{x}{a} + \frac{r-1}{2} B \frac{x}{a} + \frac{r-2}{3} C \frac{x}{a} + \frac{r-3}{4} D \frac{x}{a} + \&c.$$

llamando $A,B,C,D,$&c. al 1.°, 2.°, 3.°, 4.°, &c. términos de la serie; ó haciendo la primera parte $a=P$, y el quociente $\frac{x}{a} = Q$, de donde sale $x = aQ = PQ$,

será $(P+PQ)^r = P^r + rAQ + \frac{r-1}{2} BQ + \frac{r-2}{3} CQ + \frac{r-3}{4} DQ + \&c.$

Conviene que los principiantes se acostumbren á conservar y á poner en execucion la regla; y así, supongamos que se quiera extraer la raiz quadrada de $a^2 - x^2$, y tendremos que desenvolver la expresion $\sqrt{a^2 - x^2}$; y como para extraer una raiz se ha de partir el exponente de la cantidad por el del radical, resultará $\sqrt{a^2 - x^2} = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$; luego no habrá mas que desenvolver esta funcion ó bien por la fórmula ó por la regla; pero tanto una como otra nos dice que debemos elevar la primera parte a^2 á la potencia $\frac{1}{2}$; luego tendremos que el primer término será $(a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = \pm a$; aqui conviene presentar el primer término baxo el aspecto mas sencillo; ahora, como el segundo término se ha de componer del anterior multiplicado por el exponente de la potencia y por el quociente de la segunda parte partida por la primera, dicho segundo término será 2.° $= \frac{1}{2} \times \pm a \times \frac{-x^2}{a^2} = \mp \frac{x^2}{2a}$.

Como el tercer término se compone del segundo multiplicado por el exponente menos una unidad partido por 2, y multiplicado por dicho quociente, será 3.° $= \frac{\frac{1}{2}-1}{2} \times \mp \frac{x^2}{2a} \times \frac{-x^2}{a^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} \times \frac{\pm x^4}{2a^3} = \mp \frac{x^4}{8a^3}$.

Como el quarto término se compone del tercero multiplicado por el exponente menos dos unidades partido por 3, y por dicho quociente, tendremos que el 4.° $= \frac{\frac{1}{2}-2}{3} \times \mp \frac{x^4}{8a^3} \times \frac{-x^2}{a^2} = \frac{-\frac{3}{2}}{3} \times \pm \frac{x^6}{8a^5} = \mp \frac{x^6}{16a^5}$.

Del mismo modo tendremos el

$$5.^{o}=\frac{\frac{1}{2}-3}{4}\times\mp\frac{x^6}{16a^5}\times-\frac{x^2}{a^2}=\frac{-\frac{5}{2}}{4}\times\pm\frac{x^8}{16a^7}=\mp\frac{5x^8}{128a^7};$$

$$6.^{o}=\frac{\frac{1}{2}-4}{5}\times\mp\frac{5x^8}{128a^7}\times\frac{-x^2}{a^2}=\frac{-\frac{7}{2}}{5}\times\pm\frac{5x^{10}}{128a^9}=\mp\frac{7x^{10}}{256a^9},\ \&c.$$

por lo que

$$\sqrt{a^2-x^2}=(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}=\pm a\mp\frac{x^2}{2a}\mp\frac{x^4}{8a^3}\mp\frac{x^6}{16a^5}\mp\frac{5x^8}{128a^7}\mp\frac{7x^{10}}{256a^9}\mp\&c.$$

lo mismo que antes [452]

457 Aunque á cada término se ha necesitado dar algunas transformaciones paraque se tenga el resultado mas sencillo de la serie, no obstante en habiendo adquirido cierta práctica, todas las transformaciones se hacen de una vez; y así, es indispensable que los principiantes se adiestren tanto en esto, que de memoria vayan haciendo el cálculo y poniendo los términos correspondientes; por eso les pondremos un exemplo con los mismos raciocinios que deben hacer.

Exemplo 1.° Sea ahora la expresion $\sqrt{a^2+x^2}$ que es igual $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$; el primer término será por consiguiente a^2 elevado á $\frac{1}{2}$ que equivale á $\pm a$; luego el primer término es $\pm a$; ahora, para hallar un término qualquiera siempre se tiene que contar con tres factores: uno es el término antecedente, otro el exponente con la modificacion que dice la regla, y el otro el quociente de la segunda parte dividida por la primera; y así, se procederá primero á los signos y diremos: al exponente aqui no se necesita quitarle ninguna unidad, y por consiguiente llevará el signo +; este signo multiplicado por el $\pm$ del término anterior da $\pm$; y como el signo del quociente $\frac{x^2}{a^2}$ de la segunda parte dividida por la primera, tambien es +, tendré que como + por $\pm$ da $\pm$, el signo del segundo término será $\pm$; ahora debo multiplicar $\frac{1}{2}$ que es el exponente por los coeficientes del término anterior y del quociente, y como estos no tienen coeficientes, resulta que el coeficiente del segundo término es $\frac{1}{2}$; con lo que solo me falta multiplicar el término anterior que es a por $\frac{x^2}{a^2}$; y como la a por qué se ha de multiplicar se puede suprimir con una a de las del denominador del quociente, se sigue que dicho 2.° término es

$$\pm\frac{1}{2}\frac{x^2}{a}.$$

Para hallar el tercero lo primero á que se debe atender es á los signos; y así veremos el signo que nos da el exponente; aqui al exponente $\frac{1}{2}$ le debemos quitar una unidad, y se convierte por consiguiente en $-\frac{1}{2}$; y como se ha de partir por 2 resulta que el factor que proviene

del exponente es $-\frac{1}{4}$; luego, un signo $-$ se debe multiplicar por un signo $\pm$ del término anterior, y por un $+$ del quociente, y por lo mismo el tercer término tendrá el signo $\mp$; en punto á los coeficientes, como el quociente no tiene ninguno, solo habrá que multiplicar por el del término anterior que dará $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$; y llegando á las cantidades, como $\frac{x^2}{a}$ por $\frac{x^2}{a^2}$ da $\frac{x^4}{a^3}$, resulta que el tercer término será $\mp \frac{1}{8} \frac{x^4}{a^3}$.

Para hallar el quarto, como al exponente se le deben quitar dos unidades y partir por 3, resulta que $\frac{1}{2}$ menos 2 unidades ó $\frac{4}{2}$ quedan en $-\frac{3}{2}$, que partido por 3 es $-\frac{1}{2}$; luego en punto á signos tendremos que multiplicar el signo $-$ de este factor por el signo $\mp$ del término anterior, que da $\pm$, y luego multiplicando por el signo $+$ del quociente tendremos que el signo será $\pm$; en punto á coeficientes $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{8}$ coeficiente del término anterior da $\frac{1}{16}$, y finalmente multiplicando $\frac{x^4}{a^3}$ del término anterior por el quociente $\frac{x^2}{a^2}$ resulta que el quarto término es $\pm \frac{1}{16} \times \frac{x^6}{a^5}$.

Para hallar el quinto tendremos que quitar 3 unidades al exponente y dividir por 4, luego será $\frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} - \frac{6}{2} = -\frac{5}{2}$, que dividiendo por 4 da $-\frac{5}{8}$; ahora, este signo $-$ por el $\pm$ del término anterior da $\mp$, y vuelto á multiplicar por el $+$ del quociente, resulta $\mp$; $\frac{5}{8}$ por $\frac{1}{16}$ da $\frac{5}{128}$; y por último $\frac{x^6}{a^5}$ por $\frac{x^2}{a^2}$ da para el 5.° término $\mp \frac{5}{128} \times \frac{x^8}{a^7}$; &c.

luego $\sqrt{a^2+x^2} = (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = \pm a \pm \frac{1}{2} \frac{x^2}{a} \mp \frac{1}{8} \frac{x^4}{a^3} \pm \frac{1}{16} \frac{x^6}{a^5} \mp \frac{5}{128} \times \frac{x^8}{a^7}$ &c.

Estos raciocinios son los que deben hacer los principiantes para resolver los exemplos siguientes; más por si acaso padecen equivocacion se les pondrán aqui otros exemplos en que esté el cálculo de cada término, paraque puedan consultarle y averiguar donde han padecido la equivocacion.

Sea la expresion $\sqrt[3]{a^5+x^5} = (a^5+x^5)^{\frac{1}{3}}$ y tendremos:

Términos.

1.° $(a^5)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^5}$

2.° $\frac{1}{3} \times \sqrt[3]{a^5} \times \frac{x^5}{a^5} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt[3]{a^5}}{a^5} \times x^5 = \frac{1}{3} \frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[3]{a^{15}}} \times x^5 = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{a^5}{a^{15}}} \times x^5 = \ldots$

$\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{a^{10}}} \times x^5 = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{a^{10}}} \times x^5 = \frac{x^5}{3\sqrt[3]{a^{10}}} = \frac{x^5}{3a^3\sqrt[3]{a}}$;

3.° $\frac{(\frac{1}{3}-1)}{2} \times \frac{x^5}{3a^3\sqrt[3]{a}} \times \frac{x^5}{a^5} = \frac{-\frac{2}{3}}{2} \times \frac{x^{10}}{3a^8\sqrt[3]{a}} = -\frac{x^{10}}{9a^8\sqrt[3]{a}}$;

4.° $\frac{\frac{1}{3}-2}{3} \times -\frac{x^{10}}{9a^8\sqrt[3]{a}} \times \frac{x^5}{a^5} = \frac{-\frac{5}{3}}{3} \times -\frac{x^{15}}{9a^{13}\sqrt[3]{a}} = \frac{5x^{15}}{81a^{13}\sqrt[3]{a}}$;

5.° $\frac{\frac{1}{3}-3}{4} \times \frac{5x^{15}}{81a^{13}\sqrt[3]{a}} \times \frac{x^5}{a^5} = \frac{-\frac{8}{3}}{4} \times \frac{5x^{20}}{81a^{18}\sqrt[3]{a}} = -\frac{10x^{20}}{243a^{18}\sqrt[3]{a}}$;

luego $\sqrt[3]{a^5+x^5} = \sqrt[3]{a^5} + \frac{x^5}{3a^3\sqrt[3]{a}} - \frac{x^{10}}{9a^8\sqrt[3]{a}} + \frac{5x^{15}}{81a^{13}\sqrt[3]{a}} - \frac{10x^{20}}{243a^{18}\sqrt[3]{a}}$ &c.

Si la expresion fuese $\sqrt[5]{a^2x^3-x^5}$, con el fin de que en el quociente $\frac{x^5}{a^2x^3}$ no haya que hacer simplificaciones, le daremos esta forma $\sqrt[5]{x^3(a^2-x^2)} = [x^3(a^2-x^2)]^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{3}{5}}(a^2-x^2)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x^3} \times (a^2-x^2)^{\frac{1}{5}}$;
y desenvolviendo $(a^2-x^2)^{\frac{1}{5}}$ resultaria por último
$\sqrt[5]{a^2x^3-x^5} = \sqrt[5]{x^3} \times (a^2-x^2)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x^3}(\sqrt[5]{a^2} - \frac{1}{5}\frac{x^2}{a\sqrt[5]{a^3}} - \frac{2}{25} \times \frac{x^4}{a^3\sqrt[5]{a^3}} - \frac{6}{125} \times \frac{x^6}{a^5\sqrt[5]{a^3}} - \text{\&c.}) = \ldots$

$\sqrt[5]{a^2x^3} - \frac{1}{5}\frac{x^2}{a}\sqrt[5]{\frac{x^3}{a^3}} - \frac{2}{25} \times \frac{x^4}{a^3}\sqrt[5]{\frac{x^3}{a^3}} - \frac{6}{125}\frac{x^6}{a^5}\sqrt[5]{\frac{x^3}{a^3}} - \text{\&c.}$

Sea ahora la expresion $\frac{1}{a-x}$; como esta es igual á $1(a-x)^{-1} = (a-x)^{-1}$, tendremos:

Términos

1.° $a^{-1} = \frac{1}{a}$,

2.° $-1 \times \frac{1}{a} \times -\frac{x}{a} = +\frac{x}{a^2}$,

3.° $\frac{-1-1}{2} \times \frac{x}{a^2} \times -\frac{x}{a} = -\frac{2}{2} \times -\frac{x^2}{a^3} = \frac{x^2}{a^3}$,

$$4.^{\circ}\ \frac{-1-2}{3}\times\frac{x^2}{a^3}\times\frac{-x}{a}=-\frac{3}{3}\times-\frac{x^3}{a^4}=\frac{x^3}{a^4},$$

$$5.^{\circ}\ \frac{-1-3}{4}\times\frac{x^3}{a^4}\times\frac{-x}{a}=\frac{-4}{4}\times-\frac{x^4}{a^5}=\frac{x^4}{a^5};$$

luego $\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^3}{a^4}+$&c. como antes.

458 Por este método puede uno sacar aproxîmadamente la raiz de los números; para lo qual no hay mas que descomponer el número propuesto en dos sumandos, en que el uno sea una potencia del grado que se va á extraer, ó en la diferencia de dos números de los quales el minuendo sea una potencia, y tener cuidado de que la potencia siempre sea mayor que la resta y la mayor posible. Sea primero la raiz quadrada de 3 la que se quiere extraer; el 3 se ve que equivale á $1+2$ en que 1 es quadrado; pero como entonces el 2 es mayor que el 1 la serie seria divergente; y así, se descompondrá en $4-1$ y será $\sqrt{3}=\sqrt{4-1}=(4-1)^{\frac{1}{2}}$

Términos

$$1.^{\circ}\ (4)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2,$$

$$2.^{\circ}\ \frac{1}{2}\times 2\times\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4},$$

$$3.^{\circ}\ \frac{\frac{1}{2}-1}{2}\times-\frac{1}{4}\times-\frac{1}{4}=\frac{-\frac{1}{2}}{2}\times\frac{1}{16}=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}=-\frac{1}{64},$$

$$4.^{\circ}\ \frac{\frac{1}{2}-2}{3}\times\frac{-1}{64}\times\frac{-1}{4}=\frac{-\frac{3}{2}}{3}\times\frac{1}{256}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{256}=-\frac{1}{512},\ \text{\&c.}$$

luego $\sqrt{3}=\sqrt{4-1}=2-\frac{1}{4}-\frac{1}{64}-\frac{1}{512}-$&c.

ó reduciendo á decimales será $\sqrt{3}=2-0,267578=1,732422$, exâcta hasta los tres primeros guarismos decimales.

459 Quando la cantidad que se trata de elevar á potencias es un trinomio, entonces se toma por primera parte un término, y por segunda los otros dos; y si fuese quadrinomio el primer término por primera parte, y todos los demas por segunda; y como luego quedarán potencias indicadas de binomios ó de trinomios, se necesita despues dar ciertas transformaciones para tener el resultado baxo el aspecto mas sencillo. Para evitar esto, indaguemos el método de elevar un polinomio qualquiera á una potencia tambien qualquiera; para lo qual supongamos que se quiere elevar á la potencia r el polinomio

$a+bx+cx^2+dx^3+\&c.$

en virtud de las reflexîones hechas [§ 443] haremos

$$(a+bx+cx^2+dx^3+...)^r=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.\ (a)$$

Por la misma razon su funcion semejante

$$(a+by+cy^2+dy^3+...)^r=A+By+Cy^2+Dy^3+\&c.\ (b);$$

$$\text{haciendo}\begin{cases}a+bx+cx^2+dx^3+...=u\\ a+by+cy^2+dy^3+...=z\end{cases}(c)$$

$$\text{se tendrá}\begin{cases}(a+bx+cx^2+dx^3+...)^r=u^r\\ (a+by+cy^2+dy^3+...)^r=z^r\end{cases}(d)$$

y restando la segunda de estas de la primera, tendremos

$$u^r-z^r=(a+bx+cx^2+dx^3+...)^r-(a+by+cy^2+dy^3+...)^r=$$

$$B(x-y)+C(x^2-y^2)+D(x^3-y^3)+E(x^4-y^4)+\&c.(e),$$

y haciendo lo mismo con las (c) será

$$u-z=b(x-y)+c(x^2-y^2)+d(x^3-y^3)+e(x^4-y^4)+\&c.(f),$$

y dividiendo una por otra resultará

$$\frac{u^r-z^r}{u-z}=\frac{B(x-y)+C(x^2-y^2)+D(x^3-y^3)+E(x^4-y^4)+\&c.}{b(x-y)+c(x^2-y^2)+d(x^3-y^3)+e(x^4-y^4)+\&c.}\ (g);$$

pero como u^r-z^r es divisible por $u-z$, y da por quociente

$$u^{r-1}+u^{r-2}z+u^{r-3}z^2+...z^{r-1},$$

y ademas los dos términos del quebrado que componen el segundo miembro, son divisibles por $x-y$, resulta que haciendo la division, la equacion se convertirá en $u^{r-1}+u^{r-2}z+u^{r-3}z^2+u^{r-4}z^3+...z^{r-1}=....$

$$\frac{B+C(x+y)+D(x^2+xy+y^2)+\&c.}{b+c(x+y)+d(x^2+xy+y^2)+\&c.}\ (h).$$

Ahora, si hacemos $x=y$, como en este caso resulta tambien $u=z$, esta equacion se convertirá en $ru^{r-1}=\dfrac{B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\&c.}{b+2cx+3dx^2+4ex^3+\&c.}$ (i).

y como $ru^{r-1}=\dfrac{ru^r}{u}=\dfrac{r(a+bx+cx^2+dx^3+\&c.)^r}{a+bx+cx^2+dx^3+...}=(a)..$

$$\frac{r(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.)}{a+bx+cx^2+dx^3+\&c.}$$

se tendrá $\dfrac{r(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.)}{a+bx+cx^2+dx^3+\&c.}=\dfrac{B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\&c.}{b+2cx+3dx^2+4ex^3+\&c.};$

ó quitando los denominadores tendremos

$$r(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.)(b+2cx+3dx^2+4ex^3+\&c.)=.....$$

$$(B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\&c.)(a+bx+cx^2+dx^3+\&c.)$$

ó executando las multiplicaciones indicadas, resultará

$$\left.\begin{array}{r} rbA+rbBx+rbCx^2+rbDx^3\&. \\ +2cAr+2rcB+2rcC\,\&c. \\ +3rdA+3rdB\&c. \\ +4reA\&c. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} aB+2aCx+3aDx^2+4aEx^3+\&c. \\ +\ bB\ +2bC\ \ +3bD\ \ +\&c. \\ +\ cB\ \ +2cC\ \ +\&c. \\ +\ dB\ \ +\&c. \end{array}\right.$$

é igualando los coeficientes de las potencias homólogas de x, tendremos haciendo desde luego las reducciones donde hay r

$$aB=rbA\,,$$

$$2aC=(r-1)bB+2rcA\,,$$

$$3aD=(r-2)bC+(2r-1)cB+3rdA\,,$$

$$4aE=(r-3)bD+(2r-2)cC+(3r-1)dB+4erA\,,$$

$$5aF=(r-4)bE+(2r-3)cD+(3r-2)dC+(4r-1)eB+5rfA\,,$$

cuya ley se podria traducir en regla; donde se ve que todos los coeficientes $B,C,D,$ &c. quedarán determinados luego que A sea conocido; pero como el primer término A expresa el valor del desarrollo quando $x=0$, y aqui la funcion propuesta $(a+bx+cx^2+\&c.)^r$ se convierte en este caso en a^r, se tendrá $A=a^r$. Substituyendo este valor en las equaciones anteriores, despejando los coeficientes $B,C,D,E,$&c. y substituyéndolos en la serie presupuesta, resulta por último que

$$(a+bx+cx^2+dx^3+\&c.)^r=a^r+ra^{r-1}bx+\frac{r(r-1)}{1\times2}a^{r-2}b^2\times x^2\ldots\ldots$$
$$+ra^{r-1}c$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)}{1\times2\times3}a^{r-3}b^3\times x^3+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1\times2\times3\times4}a^{r-4}b^4\times x^4\ldots\ldots$$

$$+\frac{r(r-1)}{1\times1}a^{r-2}bc \qquad +\frac{r(r-1)(r-2)}{1\times2\times1}a^{r-3}b^2c$$

$$+ra^{r-1}d \qquad +\frac{r(r-1)}{1\times1}a^{r-2}bd$$

$$+\frac{r(r-1)}{1\times2}a^{r-2}c^2$$

$$+ra^{r-1}e$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{1\times2\times3\times4\times5}a^{r-5}b^5\times x^5+\&c.$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1\times2\times3\times1}a^{r-4}b^3e$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)}{1\times2\times1}a^{r-3}b^2d$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)}{1\times1\times2}a^{r-3}bc^2$$

$$+\frac{r(r-1)}{1\times1}a^{r-2}be$$

$$+\frac{r(r-1)}{1\times1}a^{r-2}cd$$

$$+ra^{r-1}f$$

Moivre fue el primero que presentó la fórmula precedente, é hizo notar la ley con que se forma cada uno de sus términos; pero como no tendremos ocasion de emplearla freqüentemente, no nos detendremos mas sobre este punto. Solo observaremos que no hay funciones algebráicas que no se puedan desenvolver en serie por medio de las fórmulas anteriores; porque las mas generales no podrian ser sino combinaciones de monomios ó de polinomios elevados á potencias positivas ó negativas, enteras ó fraccionarias.

Quando en el polinomio á que se haya de hacer aplicacion falte algun término, entonces el coeficiente del homólogo de $(a+bx+cx^2+\&c.)^r$ se haria igual con cero; así es que si se tratase de elevar á la tercera potencia la cantidad $3x+5x^3+7x^5$,
haríamos en la fórmula $a=0, b=3, d=5, e=0, f=7$, y $r=3$.
Y sino hubiese variable entonces se haria $x=1$, y se tomarian tantas letras a, b, c &c. de la expresion $a+bx+cx^2+\&c.$
como términos hubiese, y se igualaria cada una con su término correspondiente.

De la sumacion de las series y de su método inverso.

460 Quando se tiene una funcion desenvuelta en serie, se desea tener otra funcion que exprese uno qualquiera de sus términos independiente de los que le precedan ó sigan; á la qual se le da el nombre de *término general* de la serie; porque en él deben estar contenidos todos los demas; y como su valor depende del lugar que ocupa dicho término en la serie, se dice que *término general de una serie es una funcion del*

número n *de términos, tal que substituyendo por* n *un número qualquiera resulta el término que en la serie ocupa el lugar expresado por dicho número.* Tambien ocurre el querer encontrar otra funcion que exprese la suma de un número qualquiera de términos, á la qual se le da el nombre de *término sumatorio*; y como este debe depender del número de los términos, se dice que *término sumatorio de una serie es una funcion de* n *tal que substituyendo por* n *un número qualquiera, resulte la suma de tantos términos como unidades tenia* n.

Empezaremos por las series de los *números figurados*, que son aquellas en que las unidades de cada uno de sus términos se pueden disponer de manera que representen una figura de geometría.

« Se han considerado en la Aritmética (dice Pascal) los números de » diferentes progresiones, y se han considerado tambien los de las » diferentes potencias; pero no se han exâminado bastante aquellos de » que voy á tratar, aunque son de un grande uso; y aun ellos no tie» nen nombre, por lo que me he visto precisado á imponérseles; y como » ya estan en uso los de *progresion*, *grado* y *potencia*, me sirvo del de » *órdenes*. »

Por lo que llamo *números del primer órden* á las simples unidades,

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c.

Números de *segundo órden* á los naturales que se forman por la adicion de los simples, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.

Números de *tercer órden* á los que se forman por la adicion de los naturales que se llaman *triangulares*, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, &c.

Números del *quarto órden* aquellos que se forman por la adicion de los triangulares y que se llaman *piramidales*, 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c.

Números del *quinto órden* á los que se forman por la adicion de los precedentes, á los que no se les ha dado nombre expreso, y que se podrian llamar *triángulo-triangulares*, 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, &c.

Números del *sexto*, del *séptimo*, del *octavo*, &c. *órden* á aquellos que se forman por la adicion de los precedentes,

1, 6, 21, 56, &c.; 1, 7, 28, 84, &c.; 1, 9, 36, 120, &c. y así al infinito.

Pascal se refiere despues al triángulo aritmético para explicar esta teoría.

461 Como las unidades de los números del tercer órden se pueden colocar en forma de tiránguio equilátero, y los del quarto en forma de pirámide triangular, se les dió por extension á todas estas series de números el nombre de series de *números figurados*. Pero los números triangulares resultan de sumar los términos de una progresion aritmética, cuyo primer término es 1 y la razon 1; y como las unidades de los números que resulten de sumar los términos de una progresion aritmética cuyo primer término es 1, y la razon 2, se podrán disponer en forma de quadrado; y las de los formados semejantemente por la suma de los términos de otra progresion, cuyo primer término fuese 1 y la razon 3, se podrán disponer en forma de pentágonos regulares; y en ge-

neral las de los formados por la suma de los términos de una progresion cuyo primer término es la unidad y la razon d, se podrán colocar de manera que formasen un polígono regular de $d+2$ lados, se les ha dado á todas estas series de números los nombres de *números polígonos*.

Para convencernos de esta verdad, supongamos en primer lugar que BAC (fig. 143) sea un triángulo equiláteró; y si despues de haber prolongado indefinidamente dos de los lados AB,AC de este triángulo, se lleva sobre el uno de ellos AM la longitud AB un número de veces indefinido tal como n; y despues por los puntos de division se tiran paralelas á BC, cada una de estas paralelas será la base de un nuevo triángulo equiláteró; y los lados de estos triángulos serán respectivamente como los números $1,2,3,4,5...n$; de modo que si sobre sus bases se aplica AB tantas veces como se pueda, los extremos de esta recta señalarán sobre estas bases un número de puntos superior en una unidad al número de veces que la recta AB se puede aplicar á ellas, es decir, dos puntos si AB se puede aplicar á ella una vez; tres puntos, si dos; quatro, si tres; y en general n puntos, si se ha aplicado $n-1$ veces. De donde se sigue que los números de puntos señalados sobre BC,DE,FG,&c. contando con la unidad por primer término, formarán la progresion $1,2,3,4,5...n$, en la qual n expresará el número de puntos señalados sobre la base indicada por $n-1$. Pero la suma de esta progresion

$1,2,3,4,5...n$ es $\frac{n(n+1)}{1\times 2}$; luego $\frac{n(n+1)}{1\times 2}$ representa la suma de un número de puntos colocados, como se acaba de decir, sobre la superficie de un triángulo equiláteró que tenga n puntos sobre su lado; de donde resulta que los números de la serie $1,2,3,4,5,6...n$

$$1,3,6,10,15,21.... \frac{n(n+1)}{1\times 2},$$

de que $\frac{n(n+1)}{1\times 2}$ es el término general, se llaman *números triangulares*; y que se da el nombre de *lado* de un *número triangular* al número que indica quantos puntos hay sobre el lado del triángulo de que este número triangular cuenta los puntos, que 2 por exemplo, es el lado de 3; 3 el de 6; 4 el de 10; y en general n el lado de $\frac{n(n+1)}{1\times 2}$.

462 En segundo lugar, sea ABOH (fig. 144) un quadrado; y si despues de haber prolongado indefinidamente su diagonal AO, juntamente con dos de sus lados contiguos AB,AH, se lleva sobre AN la longitud AB un número indefinido de veces n; despues por los puntos de division se conciben tiradas paralelas á HO; y por los puntos en que estas paralelas encuentren á AO prolongada, paralelas á OB, se formará una serie de quadriláteros ABOH,ACPI,ADGK,AERL,&c.

que serán todos quadrados, porque la semejanza de los triángulos AHO, ALR, por exemplo, da AL:AH::LR:HO::AR:AO;
y la semejanza de los ABO,AER da AE:AB::ER:BO::AR:AO;
y como estas dos series de razones iguales tienen comun la razon AR:AO, tendremos AL:AH::LR:HO::AE:AB::ER:BO,
es decir, que los quatro lados de la figura ALRE son proporcionales con los quatro lados del quadrado ABOH, y por tanto que todos los lados de ALRE son iguales entre sí. Ahora, los ángulos de ALRE son todos quatro rectos, pues A pertenece ya á un quadrado ABOH, los L,E lo son por ser correspondientes con los AHO, ABO; y en fin las dos partes que componen el ángulo LRE son iguales á las dos partes que componen el ángulo BOH; luego dichos quadriláteros son quadrados. Y pues que los lados de estos quadrados siguen la progresion de los números 1,2,3,4,5...n, resulta que si sobre los lados de estos quadrados, que estan dentro del ángulo GAN, se lleva AB tantas veces como se pueda, los extremos de esta recta señalarán sobre cada uno de estos lados un número de puntos superior en la unidad al número de veces que se haya podido aplicar; y si se pone el punto A por primer término de los números respectivos de puntos que se encuentren señalados sobre uno de los lados de dichos quadrados, estos números de puntos formarán la progresion 1,2,3,4,5,&c. ...n, en la qual n representará el número de puntos señalados sobre el lado del quadrado expresado por $n-1$.

En fin, si se reunen los puntos de los dos lados de estos quadrados que estan dentro del ángulo GAN, se tendrá para cada uno de estos pares de lados dos veces tantos puntos menos uno como hay sobre uno solo de los lados; y la progresion de los puntos sobre estos dos lados juntos con el punto A por primer término, será la de los números

$$\begin{cases} 1,2,3,4,5\ldots\ldots\ n \\ 1,3,5,7,9\ldots\ldots(2n-1), \end{cases}$$

pero la suma de esta progresion es $\frac{[1+(2n-1)]n}{2}=\frac{2n^2}{2}=n^2$,

luego n^2 representa la suma de los puntos colocados como se acaba de explicar sobre la superficie de un quadrado, cuyo lado tiene n puntos; de donde resulta que los números de la serie 1,4,9,16,25....n^2
se han llamado *números quadrados*, y que se ha dado el nombre de lado al número n que indica quantos puntos se encuentran señalados sobre el lado del quadrado que contiene en su superficie n^2; que en particular se ha dado á 2 el nombre de lado de 4; á 3 el nombre de lado de 9; á 4 el nombre de lado de 16, &c.

463 Sea en tercer lugar ABCDE (fig. 145) un pentágono regular, y si despues de haber prolongado indefinidamente sus dos diagonales AC,AD juntamente con AB,AE dos de sus lados contiguos, se lleva sobre AY la longitud AB, un número de veces indefinido n, desde los pun-

tos de division se tiran paralelas á ED, y desde los puntos en que estas paralelas encuentren á AX, paralelas á DC, y en fin desde los puntos en que estas segundas paralelas encuentren á AV paralelas á CB, se formará una serie de pentágonos AFGHI, AKLMN, APQRS, ATVXY, &c. que serán todos regulares por razones análogas á las dadas [462].

Esto supuesto, si sobre los lados de los pentágonos regulares de esta serie, que estan dentro del ángulo TAY se lleva AB, tantas veces como se pueda: los extremos de esta recta señalarán sobre cada uno de estos tres lados un número de puntos superior en la unidad al número de veces que se pueda aplicar á ella; y si se pone el punto A por principio de los números respectivos de puntos que se encuentren señalados sobre el uno de los lados de dichos pentágonos, estos números de puntos seguirán la progresion de los números 1, 2, 3, 4, 5....n, en la que n representa el número de puntos señalados sobre el lado del pentágono, cuyo lado equivale á $n-1$ veces el AB. Y si se reunen los puntos de los tres lados de estos pentágonos que estan dentro del ángulo TAY, se tendrá sobre cada una de estas colecciones de tres lados, tres veces tantos puntos menos dos como se encuentren sobre cada uno de los lados así asociados: puesto que los puntos sobre las prolongaciones de las diagonales AC, AD no se deben contar dos veces. De donde se sigue que la progresion de los puntos sobre estas colecciones de á tres lados será la de los números 1, 4, 7, 10, 13, 16....$3n-2$.

Pero la suma de esta progresion es $(1+3n-2)\frac{n}{2}=\frac{(3n-1)n}{1\times 2}$; luego $\frac{(3n-1)n}{1\times 2}$ representa la suma de los puntos que estan colocados sobre la superficie de un pentágono regular, que tiene n puntos sobre su lado; por lo qual los números de la serie 1, 5, 12, 22, 35, 51.... $\frac{(3n-1)n}{1\times 2}$ han tomado el nombre de *números pentagonales*; y que relativamente á cada número pentagonal $\frac{(3n-1)n}{1\times 2}$, se ha dado el nombre de lado al número n que indica quantos puntos hay señalados sobre el lado del pentágono, que tiene $\frac{(3n-1)n}{1\times 2}$ puntos en su superficie; que en particular se ha dicho que 2 es el lado del 5: 3 el de 12: 4 el de 22, &c.

464 Sea ahora en general ABCDE... (fig. 146) un polígono regular de m lados; y si despues de haber prolongado tanto los lados AB, AF al rededor de uno de los ángulos de este polígono, como las diagonales que se pueden tirar en él desde el punto A, se aplica AB sobre AY un número n de veces indefinido: desde los puntos de division se tiran paralelas á FE, despues por los puntos en que estas paralelas encuentran á la prolongacion de AE, paralelas á ED; y desde los puntos en que estas se-

gundas encuentran á la prolongacion de AD, paralelas á DC, y así sucesivamente hasta que desde los puntos en que las paralelas encuentran al último de los lados del polígono ABCDE..., que estan comprendidos en el ángulo BAF, se formará una serie de polígonos regulares del mismo nombre que ABCD...., como se puede probar por las mismas consideraciones que lo han establecido en el caso particular del quadrado, pentágono, &c., y las figuras ABCDEF.....,AGHIKL.....,AMNPQR....., ASTVXY....,&c. serán una serie de polígonos regulares de m lados.

Esto supuesto, si sobre los $m-2$ lados de los polígonos de esta serie, que estan dentro del ángulo BAF, se lleva AB tantas veces como se pueda: los extremos de esta recta señalarán sobre cada uno de estos lados un número de puntos superior en la unidad al número de veces que esta se haya podido aplicar á ellas; y si se pone el punto A por primer término de los puntos que se encuentren respectivamente señalados sobre el lado de dichos polígonos, estos puntos seguirán la progresion $1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots n$, en la qual n representa el número de puntos señalados sobre el lado del $(n-1)$ polígono. En fin, si se reunen los puntos de los $m-2$ lados de estos polígonos, que estan dentro del ángulo BAF, se tendrá sobre cada una de estas colecciones de $m-2$ lados, $m-2$ veces tantos puntos menos $m-3$ puntos, como haya sobre uno de los lados así asociados; porque los puntos sobre las prolongaciones de las $m-3$ diagonales, que se pueden tirar desde el vértice del ángulo A en el polígono ABCDE... no se deben contar dos veces; y la progresion de los puntos sobre estas colecciones de lados, será la de los números

$$1, \ldots 2 \ldots\ldots\ldots 3 \ldots\ldots\ldots\ldots n$$

$$1, (m-2)2-(m-3), (m-2)3-(m-3), \ldots\ldots (m-2)n-(m-3),$$

progresion aritmética creciente cuya diferencia es $m-2$, y cuya suma es

$$[(m-2)n-(m-3)+1]\frac{n}{2}=\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{1\times2}.$$

De modo que $\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{1\times2}$ es la suma de los puntos colocados, como se acaba de decir, sobre la superficie de un polígono regular de m lados, que contiene n puntos sobre su lado; de donde resulta que á los números que pertenecen á las series cuyo término general es $\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{1\times2}$ se les ha dado el nombre genérico de *números poligonales* ó *números polígonos*; y que en particular se han llamado *números triangulares* á los que se derivan de la fórmula $\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{1\times2}$, quando se hace en ella $m=3$; *números quadrados* á los que resultan de esta fórmula quando se hace en ella $m=4$; *números pentagonales* á los

que se derivan de ella, haciendo $m=5$; *números exâgonales* á los que se derivan haciendo en ella $m=6$, y así sucesivamente.

En efecto, quando $m=3$, la expresion general $\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{1\times2}$, se reduce á $\frac{n^2+n}{1\times2}=\frac{n(n+1)}{1\times2}$, que es la forma que hemos hallado antes.

Quando $m=4$, la misma expresion general toma esta forma particular n^2. que es la que habíamos hallado para los números quadrados.

Quando $m=5$, la misma expresion toma esta forma $\frac{3n^2-n}{1\times2}=\frac{(3n-1)n}{1\times2}$ que era la que habíamos hallado para los números pentagonales. Luego, continuando y haciendo $m=6$, la expresion general $\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{1\times2}$ se deberá convertir en la de los números exâgonales $\frac{4n^2-2n}{1\times2}=2n^2-n=n(2n-1)$, en la qual substituyendo por n los números 1,2,3,4,5&c. se obtiene la serie de los números exâgonales 1,6,15,28,45&c. que no es otra cosa que la serie de aquellos números triangulares que responden á lados ímpares; porque si en $\frac{n(n+1)}{1\times2}$, fórmula general de los números triangulares se hace $n=2k-1$, número ímpar, se convierte en esta $\frac{(2k-1)2k}{2}=(2k-1)k$, que coincide con $(2n-1)n$ fórmula general de los números exâgonales.

465 Así como de la suma de los números triangulares resultan los que se llaman propiamente *piramidales*; así tambien podemos en general considerar números piramidales de una base qualquiera; por lo que si la base es un pentágono, ó la serie de los números de cuya suma resulta es la de los números pentagonales, tendremos que la serie se podrá llamar de *números primeros pentágono-piramidales*; y luego á la serie que se originase de esta, *serie de números segundos pentágono-piramidales*, y así sucesivamente.

Entendido esto, pasemos á manifestar como se hallan los términos sumatorios de todas estas series; pero lo haremos por un método general que se extienda á todas las series, cuyo término general sea una funcion racional y entera del número de sus términos.

Supongamos que se tenga esta progresion aritmética $\div a.b.c.d...k.l.$ Si se eleva cada uno de sus términos á la potencia m, se tendrá la serie

$$a^m, b^m, c^m, d^m.....k^m, l^m$$

cuya suma queremos encontrar, de manera que lo que se busca es el valor de $a^m+b^m+c^m+d^m+\ldots k^m+l^m$,
siendo m un número entero positivo. Por la naturaleza de la progresion, se tiene que un término qualquiera se compone del anterior mas la razon ó diferencia; luego si llamamos δ la diferencia tendremos:

$$b=a+\delta, c=b+\delta, d=c+\delta, \ldots\ldots l=k+\delta.$$

Elevando á la potencia m cada una de estas equaciones, tendremos

$$b^m=a^m+ma^{m-1}\delta+\frac{m(m-1)}{1\times2}a^{m-2}\delta^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times2\times3}\times a^{m-3}\delta^3+\&c.$$

$$c^m=b^m+mb^{m-1}\delta+\frac{m(m-1)}{1\times2}b^{m-2}\delta^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times2\times3}\times b^{m-3}\delta^3+\&c.$$

$$d^m=c^m+mc^{m-1}\delta+\frac{m(m-1)}{1\times2}c^{m-2}\delta^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times2\times3}\times c^{m-3}\delta^3+\&c.$$

. . . .

$$l^m=k^m+mk^{m-1}\delta+\frac{m(m-1)}{1\times2}k^{m-2}\delta^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times2\times3}\times k^{m-3}\delta^3+\&c.$$

que sumando ordenadamente será $b^m+c^m+d^m+\ldots l^m=a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}\delta+\&.$

$$+b^m+\frac{m}{1}b^{m-1}\delta+\&c.+c^m+\frac{m}{1}c^{m-1}\delta+\&c.+\ldots.+k^m+\frac{m}{1}k^{m-1}\delta+\&c.$$

y como en ambos miembros son comunes todas las potencias de $b,c,d,\ldots k$,&c. esto es, la potencia m de todos los términos de la progresion menos el último y el primero; que el primero no se halla sino en el segundo miembro, y el último se halla solamente en el primero, resulta que borrando de ambos miembros las cantidades comunes b^m, c^m,&c. y pasando a^m al primer miembro tendremos:

$$l^m-a^m=\frac{m}{1}a^{m-1}\delta+\frac{m(m-1)}{1\times2}a^{m-2}\delta^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times2\times3}a^{m-3}\delta^3\&.$$

$$+\frac{m}{1}b^{m-1}\delta+\frac{m(m-1)}{1\times2}b^{m-2}\delta^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times2\times3}b^{m-3}\delta^3+\&c.\ldots.$$

$$+\frac{m}{1}c^{m-1}\delta+\frac{m(m-1)}{1\times2}c^{m-2}\delta^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times2\times3}c^{m-3}\delta^3+\&c.\ldots$$

$$+\frac{m}{1}k^{m-1}\delta+\frac{m(m-1)}{1\times2}k^{m-2}\delta^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times2\times3}k^{m-3}\delta^3+\&c.$$

y ordenando con relacion á las potencias de la diferencia ó razon de la progresion δ, será $l^m-a^m=\frac{m}{1}\delta(a^{m-1}+b^{m-1}+c^{m-1}+\ldots+k^{m-1})+\ldots$

$$\frac{m(m-1)}{1\times2}\delta^2(a^{m-2}+b^{m-2}+c^{m-2}+\ldots+k^{m-2})+\ldots$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times2\times3}\delta^3(a^{m-3}+b^{m-3}+c^{m-3}+\ldots\ldots+k^{m-3})+\&c.\ (A).$$

Hagamos ahora para mayor sencillez

$$a+b+c+d+\ldots k+l=S_1,$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots k^2+l^2=S_2,$$
$$a^3+b^3+c^3+d^3+\ldots k^3+l^3=S_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^m+b^m+c^m+d^m+\ldots k^m+l^m=S_m,$$

y se tendrá

$$a+b+c+d+\ldots+k=S_1-l,$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots+k^2=S_2-l^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^m+b^m+c^m+\ldots+k^m=S_m-l^m,$$

y substituyendo estos valores en la equacion (A) se convertirá en

$$l^m-a^m=\frac{m}{1}\delta(S_{m-1}-l^{m-1})+\frac{m(m-1)}{1\times2}\delta^2\times(S_{m-2}-l^{m-2})+\ldots$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times2\times3}\delta^3\times(S_{m-3}-l^{m-3})+\&c.\ \ldots(B).$$

Este resultado contiene una cierta relacion entre las diversas sumas $S_1, S_2, S_3 \ldots S_{m-1}$ de las potencias de los términos de una progresion aritmética, y hará conocer la última quando las otras sean dadas.

Supongamos primero $m=1$, y se tendrá $l-a=\delta(S_0-l^0)$ (C);

Pero $S_0=a^0+b^0+c^0+d^0+\ldots k^0+l^0=1+1+1+1+\ldots1+1=n$, y $l^0=1$;

luego se tendrá $l-a=(n-1)\delta$ (D) ó $l=a+(n-1)\delta$,

lo que se sabia ya; pues quiere decir que el término l se compone del primero a mas tantas veces la razon como términos hay antes de él.

Supongamos ahora $m=2$, y se tendrá $l^2-a^2=2\delta(S_1-l)+\delta^2(S_0-l^0)$, y substituyendo en vez de S_0-l^0 su valor $\frac{l-a}{\delta}$ sacado de la equacion (C) se hallará $l^2-a^2=2\delta(S_1-l)+\delta(l-a)=2\delta S_1-2\delta l+\delta l-\delta a$;

de donde $S_1=\frac{l^2-a^2+\delta l+\delta a}{2\delta}=\frac{(l+a)(l-a)+\delta(l+a)}{2\delta}=\frac{(l-a+\delta)(l+a)}{2\delta}$;

y como si efectuamos la multiplicacion indicada en la equacion (D) resulta $l-a=n\delta-\delta$ ó $l-a+\delta=n\delta$,

substituyendo este valor en el de S_1 será $S_1=\frac{n(l+a)}{2}$,

que es lo mismo que se sacó para la suma de una progresion aritmética cuyo primer término es a, el último l, y n el número de los términos. La suposicion de $m=3$ dará $l^3-a^3=3\delta(S_2-l^2)+3\delta^2(S_1-l)+\delta^3(S_0-l^0)$.

Substituyendo en esta equacion en vez de S_0-l^0, y S_1-l sus valores $\frac{l-a}{\delta}$, $\frac{l^2-a^2-\delta(l-a)}{2\delta}$, hallados antes, se convertirá en

$$l^3-a^3=\frac{6\delta(S_2-l^2)+3\delta(l^2-a^2)-\delta^2(l-a)}{2};$$

que executando las operaciones indicadas y despejando S_2 da

$$S_2=\frac{6\delta l^2+2(l^3-a^3)-3\delta(l^2-a^2)+\delta^2(l-a)}{6\delta}=\ldots$$

$$\frac{2(l^3-a^3)+3\delta(l^2+a^2)+\delta^2(l-a)}{6\delta},$$

y puede servir para hallar la suma de los quadrados de la serie de los números naturales. Para esto supongamos $a=1, \delta=1$;
y como el último término es entonces igual con el número de los términos, se hará $l=n$,
y substituyendo resultará

$$S_2=\frac{2(n^3-1)+3(n^2+1)+(n-1)}{1\times2\times3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\times2\times3}.$$

La suma de los cubos de un número n de términos de la serie de los números naturales, corresponderia á las hipótesis de $m=4, a=1, \delta=1, l=n$,
y se hallaria $S_3=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;
del mismo modo podríamos hallar para las demas series.

466 Volvamos á tomar las dos fórmulas

$$l=a+(n-1)\delta, S_1=\frac{(a+l)n}{2} \text{ (E)}.$$

Si se hace $a=1$, y se substituye en vez de l su valor correspondiente en la segunda fórmula, se obtendrá $S_1=\frac{1}{2}[2+(n-1)\delta]n=n+\frac{n}{2}(n-1)\delta$;
ahora se tendrá haciendo sucesivamente

$$\delta=1 \ldots S_1=\frac{n^2+n}{1\times2}=\frac{n(n+1)}{1\times2} \ldots\ldots\ldots\ldots 1.^o$$

$$\delta=2 \ldots S_1=n^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.^o$$

$$\delta=3 \ldots S_1=n+\tfrac{3}{2}(n^2-n)=\frac{3n^2-n}{1\times2}=\frac{n(3n-1)}{1\times2} \ldots\ldots 3.^o$$

$\delta=4\ldots S_1=n+2(n^2-n)=2n^2-n=n(2n-1)$. 4.º

$\delta=5\ldots S_1=n+\frac{5}{2}(n^2-n)=\frac{5n^2-3n}{2}=\frac{n(5n-3)}{1\times 2}$ 5.º

&c. &c. &c.

Si en (1.º) se hace sucesivamente $n=1,=2,=3,=4,=$&c. se tendrá la serie de los números triangulares 1,3,6,10,15,&c. La fórmula (2.º) da en el mismo supuesto la serie 1,4,9,16,25,36,49,&c. que es la de los quadrangulares ó quadrados.

La fórmula (3.º) da la serie de los números llamados pentagonales, &c.

La fórmula (B) puede servir tambien para encontrar la suma de un número qualquiera de términos de una serie, cuyo término general está expresado por potencias enteras y positivas del número de los términos.

En efecto, supongamos que el término general de una serie sea an^p siendo a un coeficiente conocido, n el número de los términos y p un número entero y positivo; la serie será $a1^p+a2^p+a3^p+a4^p+\ldots+an^p$ pues que cada término se debe deducir del término general, haciendo en él sucesivamente $n=1,=2,=3,=4,=$&c., luego la suma será

$$a(1^p+2^p+3^p+4^p+\ldots n^p)=aS_p,$$

y como por la fórmula (B) se puede siempre encontrar el valor de S_p, se tendrá resuelta la qüestion. Si el término general fuese an^p+bn^q, cada término de la serie á que perteneceria, se compondria de la suma de los términos que ocupan el mismo lugar en las dos series que tubiesen cada una por término general an^p y bn^q; pero la suma de los términos de la 1.ª serie es aS_p, y la de los términos de la 2.ª es bS_q, luego la suma de los términos de la serie propuesta seria aS_p+bS_q; y en general si el término general de una serie fuese $an^p+bn^q+cn^r+$&c. la suma de los términos de esta serie, seria $aS_p+bS_q+cS_r+$ &c.

Sea por exemplo la serie 1,2,3,4,5,6,7,8,9,......n: siendo n el término general, la suma de todos los términos será $=S_1$;

pero la fórmula (E) da como ya se ha visto $S_1=\frac{n(l+a)}{2}$,

luego en esta será la suma $=\frac{n(n+1)}{2}$, puesto que $a=1$, y $n=l$.

Sea la serie 1,3,6,10......$\frac{n(n+1)}{2}$,

pues que se tiene por expresion del término general $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$,

la suma será $\frac{S_2}{2}+\frac{S_1}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{(2n^3+6n^2+4n)}{1\times 2\times 3}=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$.

Sea por último exemplo la serie $1, 4, 10, 20 \ldots\ldots \frac{n(n+1)(n+2)}{1\times2\times3}$,

cuyo término general es $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\times2\times3} = \frac{1}{6}n^3 + \frac{3}{6}n^2 + \frac{2}{6}n$.

Se encontrará para la suma de un número n de términos

$$\frac{S_3}{6} + \frac{3S_2}{6} + \frac{2S_1}{6} = \frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{6\times4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3\times4}.$$

467 No pondremos fin á estas investigaciones sin manifestar una de las importantes aplicaciones que tiene esta teoría de los números figurados en las plazas fortificadas y en los parques de artillería : donde en general se conservan las balas en pilas, cuyas bases son regularmente un triángulo, un quadrado ó un rectángulo, y conviene hallar el número de balas de toda la pila por el número de balas que hay en los lados de la base; por lo que nos detendremos algo sobre este punto.

En esta qüestion hay dos casos que considerar; porque ó la pila es quadrangular, quando su base ó su primera capa tiene quatro lados; ó triangular quando no tiene sino tres. *Para la pila quadrangular* (A) *habiendo supuesto el menor número de esferas, balas, &c. ó el menor lado de la base* =a, *y el mayor* =b, *la expresion ó la fórmula general de todas las esferas contenidas en la pila será*

A
ooooo
oooooo
ooooooo
oooooooo
ooooooooo
oooooooooo

$$\frac{3a^2b - a^3 + 3ab + a}{6}.$$

Para demostrarlo observaremos que una pila tal como la señalada en A, vista por lo exterior, se compone de cierto número de capas en que los lados de la superior contienen una esfera menos que los de la inmediata inferior; porque entre cada dos balas de la inferior se coloca una de la superior. de manera que estas capas estarán representadas por las figuras B,C,D,E,F

B	C	D	E	F
oooooooooo	ooooooooo	oooooooo	ooooooo	oooooo
oooooooooo	ooooooooo	oooooooo	ooooooo	$b-4$
oooooooooo	ooooooooo	oooooooo	$b-3$	
oooooooooo	ooooooooo	$b-2$		
oooooooooo	$b-1$			
b				

y tendremos que el valor de estas capas será respectivamente como se ve en (A) en la página siguiente;

El número de capas es siempre igual al menor número a, porque si en este exemplo $a=5$, se tendrá $a-5=0$; así, las capas se acaban en el quinto $(a-4)(b-4)$. Luego pues que cada una contiene al rectángulo (ab) habrá tantos rectángulos como capas. Por consiguiente para tener la suma de todos estos rectángulos es necesario multiplicar (ab) por el menor número a; así, en todos los casos posibles, se tendrá la suma de los primeros términos de todas las capas $=a^2b$.

(A)

$$
\begin{array}{ll}
\text{I} & =ab\ldots\ldots\ldots=ab \\
\text{II} & =(a-1)(b-1)=ab-1(a+b)+1 \\
\text{III} & =(a-2)(b-2)=ab-2(a+b)+4 \\
\text{IV} & =(a-3)(b-3)=ab-3(a+b)+9 \\
\text{V} & =(a-4)(b-4)=ab-4(a+b)+16
\end{array}
$$

Los coeficientes de los 2[os]. términos forman la progresion aritmética de los números naturales. El menor término es$=1$, el mayor$=a-1$ (pues que en la 1.[a] capa no le hay) y el número de los términos es tambien$=a-1$ luego la suma de esta progresion ó la de los coeficientes de los 2[os]. términos es$=\frac{a^2-a}{2}$; mudando los signos porque estos términos son negativos, viene para la suma de los coeficientes $\frac{-a^2+a}{2}$, la qual multiplicada por $(a+b)$ da la suma de los segundos términos

$$=\frac{-a^2+a}{2}(a+b)=\frac{-a^3-a^2b+a^2+ab}{2}.$$

Los últimos términos 1,4,9,16,&c. son los quadrados de la progresion de los números naturales cuyo primer término$=1$, y el último$=a-1$, pues que en la primera capa no le hay; así la suma de estos quadrados es tambien la de los últimos términos$=\frac{2a^3-3a^2+a}{6}$.

Y reuniendo todas estas sumas tendremos, despues de reducidas á un comun denominador y hechas las simplificaciones convenientes, la fórmula enunciada para la pila quadrangular.

Ahora, si $a=b$ la fórmula se convierte en $\frac{2a^3+3a^2+a}{6}$; en cuyo caso la pila se presenta baxo la figura de una pirámide quadrangular, cuya base es un quadrado; así como tambien lo son todas sus capas, de las quales la última ó mas alta no tiene sino una bala; por lo que está contenida en una sola fórmula la investigacion del número de las balas contenidas en estas dos pilas, aunque parezcan muy diferentes; pues que la primera es una pirámide truncada, y la última no es sino una pirámide.

468 *Para encontrar el número de balas contenidas en una pila trian-*

gular tal como G, *debemos usar de la fórmula* $\frac{a^3+3a^2+2a}{6}$, suponiendo que a sea el lado de la base

o
oo
ooo G
oooo
ooooo

Para probarlo, observaremos que esta pila se compone de un cierto número de capas triangulares equiláteras, puestas las unas sobre las otras; cada capa se compone de ciertas filas de esferas que forman una progresion aritmética de los números naturales; por lo que cada capa es la suma de esta progresion cuyo menor término es $=1$, y el mayor es el número de las balas contenidas en la mayor fila ó lado de esta capa. La mayor fila de una capa superior tiene una esfera menos que la mayor de la capa inmediatamente inferior, como se presenta á los sentidos en las figuras G,H,I,J,K,

G	H	I	J	K
o	o	o	o	o
oo	oo	oo	oo	$a-4$
ooo	ooo	ooo	$a-3$	
oooo	oooo	$a-2$		
ooooo	$a-1$			
a				

que representan estas capas, y puestas las unas sobre las otras forman la pila.

Esto supuesto, pues que la mayor fila de la capa mas inferior, ó el mayor término de la progresion aritmética contenido en esta capa, es $=a$, y el menor $=1$, se tiene la suma de esta progresion ó el valor de la capa inferior á todas $=\frac{a^2+a}{2}$.

La mayor fila de la segunda capa siendo $=a-1$, la del tercero $=a-2$, la del quarto $=a-3$, &c. resulta, substituyendo sucesivamente para cada capa ne lugar de a estas cantidades que el valor de cada capa será respectivamente

1.ª $=\frac{a^2+a}{2}$, 2.ª $=\frac{a^2-a}{2}$, 3.ª $=\frac{a^2-3a+2}{2}$, 4.ª $=\frac{a^2-5a+6}{2}$, 5.ª $=\frac{a^2-7a+12}{2}$

Este número de capas es siempre $=a$; porque siendo la mayor fila de la primera capa $=a$, la de la segunda $=a-1$, la de la 3.ª $=a-2$, &c. si en este exemplo $a=5$, se tendrá $a-5=0$. Por lo que la pila acaba en la capa donde hay $a-4$ que es la quinta, y donde no hay ya sino una bala. Luego pues que cada capa contiene al quadrado a^2, habrá tantos quadrados como capas. Por consiguiente para tener la suma de todos estos quadrados será necesario multiplicar a^2 por a; así, en todos los casos posibles se tendrá le suma de los primeros términos $=\frac{a^3}{2}$.

Todos los coeficientes de los numeradores de los segundos términos

negativos $-\frac{a}{2}, -\frac{3a}{2}, -\frac{5a}{2}, -\frac{7a}{2}, -$&c. formando la progresion de los números impares 1,3,5,7,&c. cuyo número de términos $=a-1$, pues que en la primera capa no hay coeficiente negativo, esta suma es

$$\frac{(1+2a-3)(a-1)}{2}=(a-1)^2=a^2-2a+1;$$

ó mudando los signos á causa de que estos coeficientes son negativos, multiplicando por a y dividiendo por 2, la suma de todos los segundos términos negativos es $=\frac{-a^2+2a-1}{2}\times a$, á la qual añadiendo tambien el 1.er término positivo $\frac{a}{2}$, resulta $\frac{-a^2+2a-1}{2}\times a+\frac{a}{2}=\frac{-a^3+2a^2}{2}$.

Los últimos términos $\frac{2}{2}, \frac{6}{2}, \frac{12}{2}$, &c. ó 1,3,6,&c. forman una progresion de los números triangulares, cuyo número de términos $=a-2$; porque en las dos primeras capas no los hay. Así, la suma de los terceros ó últimos términos $=\frac{a^3-3a^2+2a}{6}$.

Luego sumando tendremos que la suma de todas las balas contenidas en la pila triangular estará representada por la fórmula $\frac{a^3+3a^2+2a}{6}$.

469 En las series recurrentes tambien ocurren estas dos qüestiones: 1.ª *Dada una serie recurrente y la escala de relacion, encontrar la fraccion racional generatriz, y la suma de un número qualquiera de términos de dicha serie*; y 2.ª: *determinar la expresion de un término qualquiera indepedientemente de los que le preceden, ó el término general.*

Dada la escala de relacion el denominador de la fraccion generatriz es conocido [§ 446]; luego para resolver la qüestion primera no hay mas que determinar el numerador.

Sea pues la serie propuesta $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+$&c.
cuya escala de relacion sea $a'-b'+c'-d'$;
el denominador de la fraccion generatriz será $1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4$, y como sabemos [§ 447] que el numerador lo menos ha de ser inferior en una dimension al denominador, resulta que dicho numerador tendrá esta forma: $a+bx+cx^2+dx^3$, luego será $\frac{a+bx+cx^2+dx^3}{1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4}=$
$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+$&c.
ó quitando el divisor

$$\begin{aligned} a+bx+cx^2+dx^3 = A &+ Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c. \\ &- Aa' - Ba' - Ca' - \&c. \\ &\quad + Ab' + Bb' + \&c. \\ &\qquad - Ac' - \&c. \end{aligned}$$

y comparando los coeficientes de los términos homólogos tendremos

$a=A, b=B-Aa', c=C-Ba'+Ab', d=D-a'C+b'B-c'A,$

luego la fraccion generatriz pedida será

$$\frac{A+(B-a'A)x+(C-a'B+b'A)x^2+(D-a'C+b'B-c'A)x^3}{1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4}.$$

Ahora, para hallar la suma de una serie recurrente continuada hasta un término dado, procederemos de este modo. Supongamos que se desee encontrar la suma de la serie propuesta hasta el término Px^n inclusive; para esto haremos $S'=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c....Px^n$ como la suma S de esta serie prolongada al infinito es conocida, busquemos la de los términos que siguen desde el último Px^n al infinito que supondremos

$$S''=Qx^{n+1}+Rx^{n+2}+Sx^{n+3}+Tx^{n+4}\&c.=x^{n+1}(Q+Rx+Sx^2+Tx^3+\&c.)$$

y como la suma de esta serie que está dentro del paréntesis guarda la misma escala de relacion que la $A+Bx+\&c.$ porque los coeficientes $A, B,\&c...Q, R,\&c.$ son de una misma serie, tendremos que su suma será

$$\frac{Q+(R-a'Q)x+(S-a'R+b'Q)x^2+(T-a'S+b'R-c'Q)x^3}{1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4},$$

luego

$$S''=x^{n+1}\frac{Q+(R-a'Q)x+(S-a'R+b'Q)x^2+(T-a'S+b'R-c'Q)x^3}{1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4}=$$

$$\frac{Qx^{n+1}+(R-a'Q)x^{n+2}+(S-a'R+b'Q)x^{n+3}+(T-a'S+b'R-c'Q)x^{n+4}}{1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4}$$

y la suma pedida será

$$S'=S-S''=\frac{A+(B-a'A)x+(C-a'B+b'A)x^2+(D-a'C+b'B-c'A)x^3}{1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4}-$$

$$\frac{Qx^{n+1}+(R-a'Q)x^{n+2}+(S-a'R+b'Q)x^{n+3}+(T-a'S+b'R-c'Q)x^{n+4}}{1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4}$$

Del mismo modo se procederia para encontrar la fraccion generatriz quando la escala de relacion se componga de mayor número de términos.

Hagamos algunas aplicaciones y sea por exemplo la serie

$$1+8x+27x^2+64x^3+125x^4+\&c.$$

cuya escala de relacion es $4-6+4-1$, el denominador será por consiguiente $1-4x+6x^2-4x^3+x^4=(1-x)^4$ se hallará $a=1, b=8-4=4, c=27-32+6=1, d=64-108+48-4=0$, y por consiguiente $1+4x+x^2$ será el numerador.

Luego la fraccion generatriz será $\frac{1+4x+x^2}{1-4x+6x^2-4x^3+x^4}=\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}.$

Sea por segundo exemplo la serie

$$1-6x+12x^2-48x^3+120x^4-408x^5+1128x^6-3576x^7+\&c.$$

cuya escala de relacion es $-1+6$;
el denominador de la fraccion será $1+x-6x^2$,

y despues se hallará $a=1, b=-5, c=0$; luego $\frac{1-5x}{1+x-6x^2}$
representará la fraccion de que la serie propuesta es el desarrollo; y

$$\frac{1-5x+408x^5-720x^6}{1+5x-6x^2}$$

será la suma de los cinco primeros términos de esta serie.

Lo que precede supone que la serie propuesta está ordenada segun las potencias de una misma cantidad x; si se tubiese la serie numérica

$$1-6+12-48+120,$$

se tomaria en su lugar la siguiente: $1-6x+12x^2-48x^3+$&c. que se convierte en la serie propuesta haciendo $x=1$.

470 Ocupémonos ahora de la investigacion del término general.

Consideremos primero la fraccion racional $\frac{a}{1-\alpha x}=a\times\frac{1}{1-\alpha x}$.

La serie de su desarrollo es $a(1+\alpha x+\alpha^2x^2+\alpha^3x^3+....\alpha^{n-1}x^{n-1})$ cuyo término general es $a\alpha^{n-1}x^{n-1}$.

Si la fraccion fuese $\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\&c.}{1-\alpha x-6x^2-\gamma x^3-\delta x^4-\&c.}$
como tenemos medios de descomponerla en fracciones simples [§ 437 y siguientes] de esta forma $\frac{a}{1-\alpha' x}$,
tendremos que

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\&c.}{1-\alpha x-6x^2-\gamma x^3-\delta x^4-\&.}=\frac{a}{1-\alpha x}+\frac{a'}{1-\alpha' x}+\frac{a''}{1-\alpha'' x}+\frac{a'''}{1-\alpha''' x}+\&c.$$

y como $\frac{a}{1-\alpha x}=a(1+\alpha x+\alpha^2x^2+\alpha^3x^3+....\alpha^{n-1}x^{n-1}+\&c.)$

$$\frac{a'}{1-\alpha' x}=a'(1+\alpha' x+\alpha'^2x^2+\alpha'^3x^3+....\alpha'^{n-1}x^{n-1}+\&c.)$$

$$\frac{a''}{1-\alpha'' x}=a''(1+\alpha'' x+\alpha''^2x^2+\alpha''^3x^3+....\alpha''^{n-1}x^{n-1}+\&c.)$$

$$\frac{a'''}{1-\alpha''' x}=a'''(1+\alpha''' x+\alpha'''^2x^2+\alpha'''^3x^3+....\alpha'''^{n-1}x^{n-1}+\&c.)$$

resulta que si sumamos todos los términos generales de las series componentes, y llamamos k al coeficiente de dicho término, tendremos

$$kx^{n-1}=a\alpha^{n-1}x^{n-1}+a'\alpha'^{n-1}x^{n-1}+a''\alpha''^{n-1}x^{n-1}+.......$$
$$a'''\alpha'''^{n-1}x^{n-1}\&c.=(a\alpha^{n-1}+a'\alpha'^{n-1}+a''\alpha''^{n-1}+a'''\alpha'''^{n-1}\&c.)x^{n-1}$$

471 Hasta aqui todo lo que hemos hecho se reduce á dada una fun-

cion, desenvolverla en una serie; pero en muchas ocasiones conviene *hallar el valor de la variable en una serie ordenada por las potencias de la misma funcion*; á esta segunda qüestion se le ha dado el nombre de *método inverso de las series*. Y así, quando [§ 443] dada la funcion $\frac{a}{a-x}$ la desenvolvimos en la serie $1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^5}{a^5}+$ &c., procedimos por el método directo de las series; si ahora tratásemos de sacar el valor de x en valores de $\frac{a}{a-x}$, procederíamos por el mismo método analítico, usando de los coeficientes indeterminados; por lo que pasando el término constante 1 al primer miembro, y haciendo para mayor sencillez $\frac{a}{a-x}-1=z$, todo estará reducido á encontrar x en valores de z en la expresion $z=\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^5}{a^5}+$ &c.

ó haciendo $a=1$ para mayor sencillez, en la $z=x+x^2+x^3+x^4+$ &c. (a) para esto haremos $x=Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+$ &c.

donde observaremos que en la eleccion de la serie se deben hacer las mismas consideraciones que [§ 443]; y por lo mismo no hemos supuesto término constante, pues como z se reduce á cero quando x, del mismo modo deberá ser $x=0$ quando lo sea z: ahora no habrá mas que substituir en la equacion (a) en vez de x su valor presupuesto

$$Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\&c.$$

y tendremos

$$\begin{array}{rrrr} z=Az+Bz^2 & +Cz^3 & +Dz^4 & +\&c. \\ +A^2z^2 & +2ABz^3 & +2ACz^4 & +\&c. \\ & & +B^2z^4 & +\&c. \\ & +A^3z^3 & +3A^2Bz^4 & +\&c. \\ & & +A^4z^4 & +\&c. \end{array}$$

que igualando los coeficientes de los términos homólogos tendremos

$A=1$;

$B+A^2=0$ ó $B=-1$;

$C+2AB+A^3=0$ ó $C=-2\times1\times-1-1=2-1=1$;

$D+2AC+B^2+3A^2B+A^4=0$ ó $D=-2\times1\times1-(-1)^2-3\times1\times-1-1=$
$-2-1+3-1=-1$;

&c.

luego $x=z-z^2+z^3-z^4+z^5-z^6+$ &c.

Sea en general la serie $u=\alpha+ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+$ &c. pasando α al primer miembro (porque de otro modo tendríamos al elevar cada potencia un término constante) y haciendo $u-\alpha=t$,

resultará $z=ax+bx^2+cx^3+dx^4+\&c.$ (b).
Y como de la suposicion de $x=0$ resulta $z=0$, tambien deberá resultar $x=0$, suponiendo $z=0$; luego podremos hacer

$$x=Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\&c. \text{(c)}.$$

Ahora, para determinar los coeficientes $A, B, C.$&c. que son independientes de z, substituiremos en vez de x y sus potencias, en la equacion (b) su valor presupuesto (c); esto exige que se eleve la equacion (c) á las diferentes potencias á que lo está la x, y que estas potencias se multipliquen cada una por su coeficiente respectivo $a,b,c,$&c.
todo lo qual se puede hacer de una vez en esta forma:

$$z=\begin{cases} ax=aAz+aBz^2+aCz^3 & +aDz^4 \quad +\&c. \\ +bx^2= \quad +bA^2z^2+2bABz^3+2bACz^4+\&c. \\ \qquad\qquad\qquad +bB^2z^4 \quad +\&c. \\ +cx^3= \qquad +cA^3z^3+3cA^2Bz^4+\&c. \\ +dx^4= \qquad\qquad +\ dA^4z^4+\&c. \end{cases}$$

é igualando los coeficientes de los términos homólogos de $z, z^2, z^3,$&c.

se encuentra $aA=1$ ó $A=\frac{1}{a}$,

$$aB+bA^2=0 \text{ ó } B=-\frac{bA^2}{a}=-\frac{b\frac{1}{a^2}}{a}=-\frac{b}{a^3};$$

$$aC+2bAB+cA^3=0 \text{ ó } C=-\frac{2bAB+cA^3}{a}=-\frac{2b\frac{1}{a}\times-\frac{b}{a^3}+c\times\frac{1}{a^3}}{a}=$$

$$-\frac{-\frac{2b^2}{a^4}+\frac{c}{a^3}}{a}=-\frac{-2b^2+ac}{a^5}=\frac{2b^2-ac}{a^5};$$

$$aD+2bAC+bB^2+3cA^2B+dA^4=0,$$

$$\text{ó } D=-\frac{2bAC+bB^2+3cA^2B+dA^4}{a}=-\ldots$$

$$\frac{2b\frac{1}{a}\times\frac{2b^2-ac}{a^5}+b\times\frac{b^2}{a^6}+3c\times\frac{1}{a^2}\times-\frac{b}{a^3}+\frac{d}{a^4}}{a}=\ldots\ldots$$

$$-\frac{\frac{4b^3-2bac}{a^6}+\frac{b^3}{a^6}-\frac{3cb}{a^5}+\frac{d}{a^4}}{a}=-\ldots$$

$$\frac{4b^3-2bac+b^3-3acb+da^2}{a^7}=-\frac{5b^3-5acb+da^2}{a^7};$$

y por consiguiente $x=\frac{1}{a}z-\frac{b}{a^3}z^2+\frac{2b^2-ac}{a^5}z^3-\frac{5b^3-5abc+a^2d}{a^7}z^4$ &c.

Del mismo modo procederíamos si se tubiese la equacion

$$\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\&c.=ax+bx^2+cx^3+dx^4+\&c.$$

formada por dos series; si se quisiese obtener la expresion de u, se supondria $u=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\&c.$
y se procederia como antes. No insistiremos mas sobre este punto, porque no llegamos á obtener fórmulas cuya ley se percibe con facilidad. Más antes de concluir no podemos menos de hacer ver el ingenioso método con que Neuton executa esto, y que nuestro ilustre Geómetra y Astrónomo D. José Chaix nos ha presentado con tanta elegancia como sencillez en las pág. 181 y 182 de sus instituciones de cálculo diferencial.

Supongamos que se tenga la serie

$$z=x-\frac{x^3}{2\times3}+\frac{x^5}{2\times3\times4\times5}-\frac{x^7}{2\times3\times4\times5\times6\times7}+\&c.$$

y que se quiera hallar el valor de x en valores de z; lo qual se logrará eliminando de esta equacion los términos donde se halle x^3, x^5, x^7, &c.; para esto se ve que si elevamos la equacion propuesta á la tercera potencia tendremos $z^3=x^3-\frac{x^5}{2}+\left(\frac{1}{2\times4\times5}+\frac{1}{4\times3}\right)x^7-\&c.=x^3-\ldots$

$$\frac{x^5}{2}+\left(\frac{3}{2\times4\times5\times3}+\frac{5\times2}{2\times4\times3\times5}\right)x^7+\&c.=x^3-\frac{x^5}{2}+\frac{13}{2\times3\times4\times5}x^7-\&c.$$

ó dividiendo por 6 será $\frac{z^3}{6}=\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{12}+\frac{13}{2\times3\times4\times5\times6}x^7-\&c.$

y sumando esta equacion con la propuesta resultará

$$z+\frac{z^3}{6}=x-\left(\tfrac{1}{12}-\tfrac{1}{120}\right)x^5+\left(\tfrac{13}{720}-\tfrac{1}{5040}\right)x^7-\&c.$$

porque $-\frac{x^3}{6}$ y $+\frac{x^3}{6}$ se destruyen, y haciendo las reducciones correspondientes se convierte en $z+\frac{z^3}{6}=x-\frac{3x^5}{40}+\frac{x^7}{56}-\&c.$

para hacer que x^5 desaparezca de esta equacion, elevaremos la propuesta á la quinta potencia y hallaremos $z^5=x^5-\frac{5x^7}{6}+\&c.$

de donde multiplicando por $\frac{3}{40}$ inferiremos $\frac{3z^5}{40}=\frac{3x^5}{40}-\frac{x^7}{16}+\&c.$

y por consiguiente $z+\frac{z^3}{3}+\frac{3z^5}{40}=x-(\frac{1}{10}-\frac{1}{56})x^7+\&c.=x-\frac{5x^7}{112}+\&c.$

Del mismo modo hallaríamos $\frac{5z^7}{112}=\frac{5x^7}{112}-\&c.$

lo que nos daria $z+\frac{z^3}{6}+\frac{3z^5}{40}+\frac{5z^7}{112}=x-\&c.$

y por consiguiente

$$x=z+\frac{z^3}{6}+\frac{3z^5}{40}+\frac{5z^7}{112}+\&c.=z+\frac{z^3}{2\times3}+\frac{3z^5}{2\times4\times5}+\frac{3\times5\times z^7}{2\times4\times6\times7}+\&c.$$

y como se ve la ley que observan los términos se podrá continuar tanto como se desee.

Si la potencia de la incógnita en el primer término de la serie fuese superior á la primera, seria tambien fácil determinar las potencias sucesivas á que se deberia elevar la equacion propuesta para eliminar sucesivamente los otros términos. Por exemplo, si la equacion propuesta fuese $z=ax^2+bx^3+cx^4+\&c.$
tendríamos que elevarla á la potencia $\frac{3}{2}$ para eliminar el término bx^3, á la segunda para eliminar el término cx^4, &c.

Del desarrollo de las funciones trascendentes en series.

472 Ya hemos dicho que funciones trascendentes son aquellas en que la cantidad variable es alguna linea trigonométrica, algun logaritmo, ó en que ella se halla por exponente. Los métodos que se tenian antes para desenvolver en serie estas funciones eran complicados; pero nuestro amigo el Sr. D. José Chaix ha inventado un nuevo método general muy sencillo, para desenvolver en serie no solo estas funciones sino qualesquiera otras; y que está publicado en una excelente memoria que deberá consultar el que desee imponerse en el método de inventar; pues presenta en ella la sucesion de las ideas que á él le conduxeron; nosotros principiaremos este punto por el desarrollo de la funcion log. $(1+x)$ para lo qual haremos log. $(1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\&c.$
en cuya serie no hay ningun término constante, porque quando $x=0$, la funcion se convierte en log. $(1+0)=$ log. $1=0$;
no se debe hallar x en el denominador, porque en este caso deberia ser ∞ la funcion quando $x=0$; y no debe haber x con exponente fraccionario porque entonces la funcion despues de desenvuelta tendria mas valores que antes de desenvolver.

Ahora, como los coeficientes indeterminados A, B, C, D, &c. son independientes de x, resulta que serán los mismos para otra qualquiera variable x', luego tendremos log. $(1+x')=Ax'+Bx'^2+Cx'^3+Dx'^4+\&c.$

suponiendo ahora que $x'=2x+x^2$, y substituyendo este valor en la equacion antecedente será

$$\log.(1+2x+x^2)=A(2x+x^2)+B(2x+x^2)^2+C(2x+x^2)^3+D(2x+x^2)^4\&c.$$

y como lo que hay dentro del paréntesis es el quadrado de $1+x$, tendremos

$$\log.(1+x)^2=2Ax+\ Ax^2+4Bx^3+\ Bx^4+\&c.$$
$$+4Bx^2+8Cx^3+12Cx^4+\&c.$$
$$+16Dx^4+\&c.$$

pero [I. 304] $\log.(1+x)^2=2\log.(1+x)$, luego si substituimos en esta equacion en vez de $\log.(1+x)^2$ y $\log.(1+x)$ sus valores, será

$$\left.\begin{array}{l}2Ax+\ Ax^2+4Bx^3+\ Bx^4+\&c.\\ \quad +4Bx^2+8Cx^3+12Cx^4+\&c.\\ \qquad +16Dx^4+\&c.\end{array}\right\}=2Ax+2Bx^2+2Cx^3+2Dx^4+\&c.$$

en que comparando los coeficientes de los términos homólogos, tendremos

$$A=A,B=-\frac{A}{2},\ 6C=-4B=2A \text{ y } C=\frac{A}{3},$$

$$14D=-12C-B=-4A+\frac{A}{2}=-\frac{7A}{2}, \text{ y } D=-\frac{A}{4}, \&c.$$

luego se tendrá

$$\log.(1+x)=Ax-\frac{Ax^2}{2}+\frac{Ax^3}{3}-\frac{Ax^4}{4}+\&c.=\ldots$$

$$A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\&c.\right)$$

Esta expresion del logaritmo de $1+x$ contiene el coeficiente constante indeterminado A; el qual debe quedar necesariamente así, esto es, *indeterminado*, á fin de que por su medio se puedan representar todos los sistemas imaginables de logaritmos; pues la teoría de estos enseña que un número dado qualquiera tiene una infinidad de logaritmos diferentes, correspondientes á las diferentes bases que se pueden emplear, ó á los sistemas respectivos que de ellas resultan.

A cada valor determinado del factor A corresponde un sistema logarítmico particular, del qual dicho valor es el *módulo*. El supuesto mas sencillo que se puede hacer con el módulo A, es el de $A=1$ que adoptó el inventor Neper de los logaritmos; los logaritmos de este sistema particular se llaman neperianos (*); y en dicho sistema resulta

$$\log.(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\&c.$$

Si en esta expresion hacemos $1+x=0$, que da $x=-1$, tendremos $\log.\ 0=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\&c.=-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\&c.)$

(*) *A estos logaritmos se les ha llamado tambien* hiperbólicos *aunque con impropiedad.*

y como esta serie va al infinito, resulta que el logaritmo de cero está representado por *infinito negativo*. Si hiciéramos $1+x=\infty$,

lo que dará $x=\infty-1=\frac{1}{0}-1=\frac{1-1.0}{0}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$,

tendríamos $\log.\infty=\infty-\frac{\infty^2}{2}+\frac{\infty^3}{3}-\&c.=\infty$.

473 Entre la base de un sistema qualquiera de logaritmos y el módulo correspondiente, hay cierta relacion, por medio de la qual se puede determinar una de estas dos cantidades quando se conoce la otra, que es lo que vamos á probar desenvolviendo la funcion exponencial a^x.

Para esto haremos $a^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\&c.$ (1), en la qual ponemos por primer término la unidad, porque quando $x=0$ la funcion se convierte en $a^0=1$; y por lo mismo tampoco debe haber término ninguno donde x se halle con exponente negativo ó en el denominador, porque en este caso la funcion seria infinita quando $x=0$; ademas no debe haber ningun término con exponente fraccionario, porque entonces la funcion despues de desenvuelta tendria mas valores que antes de desenvolver.

Ahora, como las cantidades $A.B,C,\&c.$ son independientes de x, resulta que si en vez de x ponemos x', será $a^{x'}=1+Ax'+Bx'^2+Cx'^3+\&c.$ y suponiendo que $x'=2x$, será
$a^{2x}=1+A\times2x+B(2x)^2+C(2x)^3\&c.=1+2Ax+4Bx^2+8Cx^3+16Dx^4\&c.$
ahora elevando al quadrado la equacion (1) tendremos

$$\begin{aligned}(a^x)^2=1+2Ax+2Bx^2&+2Cx^3+2Dx^4+\&c.\\ +A^2x^2&+2ABx^3+2ACx^4+\&c.\\ &+B^2x^4+\&c.\end{aligned}$$

pero $(a^x)^2=a^{2x}$, luego si igualamos estos dos valores de a^{2x}, se tendrá

$$\left.\begin{aligned}1+2Ax+2Bx^2&+2Cx^3+2Dx^4+\&c.\\ +A^2x^2&+2ABx^3+2ACx^4+\&c.\\ &+B^2x^4+\&c.\end{aligned}\right\}=\ldots\ldots$$

$1+2Ax+4Bx^2+8Cx^3+16Dx^4+\&c.$

en la qual comparando los términos homólogos se tendrá

$A=A, B=\frac{A^2}{2}$, $6C=2AB=A^3$, y $C=\frac{A^3}{2\times3}$, $14D=2AC+B^2=$

$\frac{A^4}{3}+\frac{A^4}{4}=\frac{7A^4}{3\times4}$, y $D=\frac{A^4}{2\times3\times4}$ &c.

y por consiguiente será $a^x=1+Ax+\frac{A^2x^2}{2}+\frac{A^3x^3}{2\times3}+\frac{A^4x^4}{2\times3\times4}-\&c.$ (2)

Si en esta equacion hacemos $x=1$, se tendrá

$$a=1+A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{2\times3}+\frac{A^4}{2\times3\times4}+\&c.$$

y llamando e al valor numérico de a quando $A=1$ será

$$e=1+1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\&c.=2{,}7182818284590452353\,6;$$

por lo qual será $e^x=1+x+\frac{x^2}{1\times2}+\frac{x^3}{1\times2\times3}+\frac{x^4}{1\times2\times3\times4}+\&c.(3)$;

y haciendo ahora en esta $x=A$, se tendrá

$$e^A=1+A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{2\times3}+\frac{A^4}{1\times2\times3\times4}+\&c.;$$

y como si en la serie (2) se hace $x=1$ se tiene tambien

$a=1+A+\frac{A^2}{1\times2}+\frac{A^3}{1\times2\times3}+\&c.$ resultará $e^A=a$, de donde $e=a^{\frac{1}{A}}$,

de la qual se infiere $\frac{\log. a}{A}=\log. e$; ó substituyendo M en lugar de

$\log. e$ será $\frac{\log. a}{A}=M$; y por consiguiente $A=\frac{\log. a}{M}$.

Ahora, si suponemos que sea e la base de un sistema de logaritmos, como sucede en el de Neper, á causa de $\text{l}.e=1$, será en este supuesto $\text{l}.a=A\text{l}.e=A$; y substituyendo este valor de A en la referida serie, será

$$a^x=1+x\text{l}.a+x^2\frac{(\text{l}.a)^2}{2}+x^3\frac{(\text{l}.a)^3}{2\times3}+x^4\frac{(\text{l}.a)^4}{2\times3\times4}+\&c.$$

Finalmente, si suponemos que la cantidad constante a sea la base del sistema correspondiente al módulo M, será en este caso $\log. a=1$, $A=\frac{1}{M}$, y por consiguiente será $a^x=1+\frac{x}{M}+\frac{x^2}{2M^2}+\frac{x^3}{2\times3M^3}+\&c.$

474 Pasemos ya á las funciones circulares, y supongamos que se quiera hallar el seno de un arco x en potencias del mismo arco; para esto partiremos [20] de la equacion $\text{sen}.3x=3\text{sen}.x-4(\text{sen}.x)^3$ (m), y haremos $\text{sen}.x=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+Fx^6+Gx^7+\&c.$ en cuya serie no ponemos término ninguno constante á causa de que quando $x=0$, tambien el seno es cero.

Ahora, como los coeficientes A, B, C, &c. son independientes de x, tendremos que serán los mismos para qualquiera otra variable x', y será

$$\text{sen}.x'=Ax'+Bx'^2+Cx'^3+Dx'^4+Ex'^5+\&c.$$

y suponiendo que $x'=3x$, se tendrá

$$\text{sen.}3x=A\times3x+B(3x)^2+C(3x)^3+D(3x)^4+E(3x)^5+\&c.=\ldots$$
$$3Ax+9Bx^2+27Cx^3+81Dx^4+243Ex^5+\&c.$$

y elevando la serie que expresa el valor de sen. x al cubo, será

$$(\text{sen. }x)^3=A^3x^3+3A^2Bx^4+3A^2Cx^5+\&c.$$
$$+3AB^2x^5+\&c.$$

Substituyendo estas dos series y la primitiva en la equacion (m) resultará $3Ax+9Bx^2+27Cx^3+81Dx^4+243Ex^5+\&c.=\ldots$

$$3Ax+3Bx^2+3Cx^3+3Dx^4+3Ex^5+\&c.$$
$$-4A^3x^3-12A^2Bx^4-12A^2Cx^5-\&c.$$
$$-12AB^2x^5-\&c.$$

en la qual comparando los coeficientes de los términos homólogos se tendrá $A=A, B=0, 24C=-4A^3$ y $C=-\frac{A^3}{6}=-\frac{A^3}{2\times3}$;

$D=0, 20E=-A^2C=\frac{A^5}{2\times3}$, y $E=\frac{A^5}{2\times3\times4\times5}$ &c.

y escribiendo estos valores de los coeficientes B, C, D, &c. en la serie supuesta será $\text{sen.}x=Ax-\frac{A^3x^3}{2\times3}+\frac{A^5x^5}{2\times3\times4\times5}-\&c.$

Esta expresion del seno de un arco qualquiera x contiene la constante indeterminada A, coeficiente del primer término de la serie supuesta. Para determinarla observarémos que siendo $Ax-\frac{A^3x^3}{2\times3}+\frac{A^5x^5}{2.3.4.5}-\&c.$ el seno del arco correspondiente x, la razon de la primera de estas cantidades á la segunda será

$$\frac{\text{sen.}x}{x}=\frac{Ax-\frac{A^3x^3}{2\times3}+\frac{A^5x^5}{2\times3\times4\times5}-\&c.}{x}=A-\frac{A^3x^2}{2\times3}+\frac{A^5x^4}{2\times3\times4\times5}-\&c.$$

Ahora, si suponemos que el arco x vaya menguando indefinidamente, esta razon se aproximará continuamente á la cantidad A: de manera que la diferencia entre dicha razon y la constante A, llegará á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea, sin que jamas lleguen á ser iguales; por consiguiente la cantidad A será el límite de la referida razon. Pero quando x disminuye, disminuye tambien sen.x, y se aproxîma á él, de manera que la razon $\frac{\text{sen.}x}{x}$ se puede acercar á la unidad tanto como se desee; luego la unidad será tambien el límite de dicha razon; y como [I. 328] dos cantidades que son el límite de una tercera son iguales entre sí, resultará $A=1$.

Substituyendo este valor de A en la expresion del seno de x, se trans-

formará en $\text{sen.}x = x - \frac{x^3}{2\times3} + \frac{x^5}{2\times3\times4\times5} - \frac{x^7}{2\times3\times4\times5\times6\times7} + \&c.$

475 La funcion cos. x se puede transformar en serie de dos modos muy diferentes: á saber, deduciéndola de la expresion hallada del seno del arco x, por medio de alguna equacion que exprese la relacion entre el seno y el coseno de un arco, ó bien determinando directamente dicha serie por el expresado método general.

En efecto, si en la equacion $\text{sen.}x = x - \frac{x^3}{2\times3} + \frac{x^5}{2\times3\times4\times5} - \&c.$

substituimos $\frac{x}{2}$ en lugar de x, se transformará en

$$\text{sen.}\frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2\times3\times8} + \frac{x^5}{2\times3\times4\times5\times32} - \&c.$$

de donde inferiremos, elevando al quadrado,

$$\left(\text{sen.}\frac{x}{2}\right)^2 = \left.\begin{matrix}\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{2.3.8} + \frac{x^6}{2.3.4.5.32} - \&c. \\ + \frac{x^6}{4.9.64} - \&c.\end{matrix}\right\} = \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{2.3.8} + \frac{x^6}{2.3.4.5.12} - \&c.$$

y como [19,(3)] $\cos.x = 1 - 2\left(\text{sen.}\frac{x}{2}\right)^2$, tendremos que substituyendo por $\left(\text{sen.}\frac{x}{2}\right)^2$ la serie que acabamos de hallar, resultará

$$\cos.x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \&c.$$

Para hallar la misma serie por el método general, partiríamos [19,(4)] de la equacion $\frac{1+\cos.2x}{2} = (\cos.x)^2$, haciendo $\cos.x = 1 + Ax + Bx^2 + \&c.$ donde hallaríamos indeterminada la B, que seria igual con $-\frac{1}{2}$, por un método análogo á aquel con que se determinó A.

476 Pasemos ya á la tangente, para lo qual partiremos [20] de la fórmula ó equacion $\text{tang.}2x = 2\,\text{tang.}x + \text{tang.}2x(\text{tang.}x)^2$,
y supondremos $\text{tang.}x = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \&c.$
cuya serie no tiene término alguno constante, á causa de que el arco y su tangente se desvanecen á un mismo tiempo. Como los coeficientes A, B, C, &c. son independientes de x, serán los mismos para otro arco qualquiera $x' = 2x$; de manera que se tendrá

$$\text{tang.}2x = 2Ax + 4Bx^2 + 8Cx^3 + 16Dx^4 + 32Ex^5 + \&c.$$

y elevando al quadrado la serie presupuesta tendremos

$$\begin{aligned}(\text{tang.}x)^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 &+ 2ACx^4 + 2ADx^5 + \&c. \\ &+ B^2x^4 \quad + 2BCx^5 + \&c.\end{aligned}$$

$$y\ \text{tang.}2x(\text{tang.}x)^2 = 2A^3x^3 + 8A^2Bx^4 + 12A^2Cx^5 + \&c.$$
$$+8AB^2x^5 + \&c.$$

por lo qual resultará $2Ax + 4Bx^2 + 8Cx^3 + 16Dx^4 + 32Ex^5 + \&c. = \ldots\ldots$

$$2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 + 2Ex^5 + \&c.$$
$$+2A^3x^3 + 8A^2Bx^4 + 12A^2Cx^5 + \&c.$$
$$+ 8AB^2x^5 + \&c.$$

la qual dará $A = A, B = 0, 6C = 2A^3$, y $C = \frac{A^3}{3}$, $D = 0, 30E = 12A^2C = \ldots$ $4A^5$, y $E = \frac{2A^5}{3 \cdot 5}$ &c.

y substituyendo estos valores de los coeficientes B, C, D, E, &c. tendremos la expresion $\text{tang.}x = Ax + \frac{A^3x^3}{3} + \frac{2A^5x^5}{3\times5} + \&c.$ la misma que resultaria de la fórmula $\text{tang.}x = \frac{\text{sen.}x}{\cos.x}$.

Para determinar A observaremos que la razon de la tangente al arco correspondiente es

$$\frac{\text{tang.}x}{x} = \frac{Ax + \frac{A^3x^3}{3} + \frac{2A^5x^5}{3\times5} + \&c.}{x} = A + \frac{A^3x^2}{3} + \frac{2A^5x^4}{3\times5} + \&c.$$

y que relativamente á la disminucion ó decremento del arco x, esta razon tiene por límite á la cantidad constante A. Pero como la tangente disminuye quando el arco, de manera que puede llegar á ser la diferencia menor que qualquier cantidad dada, resulta que la unidad es tambien el límite de la razon $\frac{\text{tang.}x}{x}$; luego [I. 328] se tendrá $A = 1$, y por consiguiente será $\text{tang.}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3\times5} + \&c.$

477 Los valores de las lineas trigonométricas los podemos expresar aun de un modo mas sencillo por medio de las exponenciales; porque si en la equacion [(3)473] substituimos $x\sqrt{-1}$ en vez de x, se tendrá

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1\times2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1\times2\times3} + \frac{x^4}{1\times2\times3\times4} + \ldots\ldots$$
$$\frac{x^5\sqrt{-1}}{1\times2\times3\times4\times5} - \frac{x^6}{1\times2\times3\times4\times5\times6} - \&c.$$

donde los términos impares equivalen á la serie que expresa el valor de

cos.x, y los pares á la que expresa el de sen.x multiplicada por $\sqrt{-1}$,

luego se tendrá $e^{x\sqrt{-1}}=\cos.x+\text{sen}.x\sqrt{-1}$ (a),

y tomando el radical con el signo $-$ será $e^{-x\sqrt{-1}}=\cos.x-\text{sen}.x\sqrt{-1}$ (b) las quales sumadas dan despues de dividir por 2

$$\cos.x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \text{ (c)};$$

y restando la segunda de la primera y dividiendo por $2\sqrt{-1}$ se obtendrá

$$\text{sen}.x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \text{ (d)};$$

de donde resulta $\text{tang}.x=\frac{\text{sen}.x}{\cos.x}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\times\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}$

Aunque la doctrina de los logaritmos se halla tan sólidamente establecida que parezcan sus proposiciones tan rigorosamente demostradas como las de la Geometría, han discordado los Matemáticos acerca de la naturaleza de los logaritmos de los números negativos; y sino se halla muy agitada esta controversia (dice Euler) es al parecer porque no se ha querido hacer sospechosa la certidumbre de todo lo que enseñan las matemáticas puras, presentando á la vista de todos las dificultades, y aun las contradicciones, á que estan sujetos los pareceres de los Matemáticos sobre los logaritmos de los números negativos é imaginarios. Pues aunque los Geómetras puedan discordar en qüestiones de las matemáticas mixtas, donde las diversas maneras de ver los objetos y formar ideas exâctas de ellos puedan inducir á ello, se ha pretendido siempre que las matemáticas puras estaban exêntas de todo género de disputa, y que no se hallaba en ellas nada cuya verdad ó falsedad no se tubiese rigorosamente demostrada.

Apesar de que la teoría de los logaritmos pertenece sin disputa á las matemáticas puras, Juan Bernoulli decia que los logaritmos de los números negativos eran los mismos que los de los números positivos, esto es, reales, que log a=log.$-a$. Leibnitz sostenia que los logaritmos de todos los números negativos eran imaginarios. Cada uno de estos Geómetras da razones que comprueban su asercion, y ponen objeciones á la contraria; y es muy particular el que ya se abraze una asercion, ya otra,

se incurra en contradicciones verdaderas. Por esta causa, el gran Euler despues de haber expuesto las razones de Bernoulli en una memoria impresa entre las de la Academia de Berlin, año de 1749, manifestó que esto provenia de que en la teoría de los logaritmos se suponia tácitamente que á un mismo número correspondia solo un logaritmo, quando pueden corresponder infinitos. Este Geómetra demuestra esta proposicion con toda exâctitud, y luego pasa á determinar los infinitos logaritmos que puede tener un número dado; y halla que los logaritmos de los números positivos son todos imaginarios, excepto uno que es real, y que los de los números negativos son todos imaginarios; por lo que decide la qüestion á favor de Leibnitz. Despues se ha querido aun insistir en la misma qüestion; pero las razones que se dan contra la decision de Euler no creo pueden tener fuerza ninguna, por lo que sin detenernos en ellas pasaremos á manifestar que *un número puede tener una infinidad de logaritmos, de los quales uno solo es real y todos los demas imaginarios.*

Para probarlo pasaremos á los logaritmos en la fórmula (a), y suponiendo que sea en el sistema neperiano que da $\log. e = 1$,

saldrá $x\sqrt{-1} = \mathrm{l}.(\cos. x + \mathrm{sen}. x\sqrt{-1})$ y tendremos que $x=0$, da $\mathrm{l}.1=0$, lo que ya sabíamos; y suponiendo $x=2\pi, =4\pi, =6\pi$, &c.

se tendrá $\mathrm{l}.1 = 2\pi\sqrt{-1}, \mathrm{l}.1 = 4\pi\sqrt{-1}, \mathrm{l}.1 = 6\pi\sqrt{-1}$,

y en general $\mathrm{l}.1 = 2k\pi\sqrt{-1}$ siendo k un número entero. Ahora, como todo número $a = 1.a$, se tendrá $\log. a = \log. a + 2k\pi\sqrt{-1}$, que expresa la proposicion enunciada, pues podemos dar á k el valor que nos acomode; y el logaritmo real es el que responde á $k=0$.

Si en la misma fórmula $x\sqrt{-1} = \mathrm{l}.(\cos. x + \mathrm{sen}. x\sqrt{-1})$
se hace $x=\pi, =3\pi, =5\pi, =7\pi \ldots = (2k+1)\pi$
se tendrá $\mathrm{l}.(-1) = \pi\sqrt{-1}, \mathrm{l}.(-1) = 3\pi\sqrt{-1}, \mathrm{l}.(-1) = 5\pi\sqrt{-1}, \ldots$
$\mathrm{l}.(-1) = 7\pi\sqrt{-1} \ldots \mathrm{l}.(-1) = (2k+1)\pi\sqrt{-1}$;
de donde se infiere que todos los logaritmos de -1 son imaginarios, y lo mismo sucede con los de un número negativo qualquiera; porque

$$\mathrm{l}.(-a) = \mathrm{l}.(-1.a) = \mathrm{l}.a + \mathrm{l}.(-1) = \mathrm{l}.a + (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Del método de los Límites.

478 Hasta aqui solo hemos tratado de la transformacion de las funciones, ya en otras mas sencillas, ya en una serie ordenada por las potencias de la variable; ahora vamos á indagar quales son las expresiones entre que se hallan siempre comprendidos los valores que pueden tener dichas funciones.

Sabemos que en la idea de funcion entra que si la cantidad, de que se dice funcion, varía, debe variar la misma funcion; y como á la variable se le pueden dar todos los valores posibles, se trata de determinar entre que cantidades estan comprendidos todos los valores de la funcion. Para lo qual recordaremos que así como á las expresiones o y $\frac{1}{0}$ entre que se halla el valor de toda variable [I. 328] se llaman *límites de dicha variable*, así tambien á aquellas cantidades entre que estan comprendidos todos los valores de la funcion, se llaman *límites de dicha funcion*; de manera que se entiende por *límite de una cantidad ó funcion á aquella cantidad á la qual no puede llegar jamas la otra; pero tal que se puede hacer que la diferencia entre ella y la cantidad propuesta sea menor que qualquiera otra cantidad dada por pequeña que sea.*

Bien analizada esta definicion se echa de ver que en la idea de *límite* entran estas dos, á saber: que la cantidad jamas puede llegar al límite; y que la diferencia entre aquella y este puede llegar á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Reflexîonemos aun algo acerca de los límites generales de todas las cantidades. Sea, por exemplo, x una cantidad variable, si consideramos que x varía y se convierte en x', de manera que la variacion que le resulte sea el hacerse dos veces menor ó mas de dos veces menor; y luego que x vuelva á variar haciéndose dos veces menor ó mas de dos veces menor que lo que era antes, y esto se hace continuamente, el valor de x llegará á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea; luego esta cantidad se podrá acercar á o tanto como se quiera; y como jamas puede llegar á cero, se sigue que o es el *límite* general de la cantidad x; y como en la idea de x solo hemos tenido presente que x es una cantidad variable que decrece continuamente, resulta que o es el verdadero límite de todas las cantidades que decrecen continuamente: *decrecer continuamente es decrecer sin fin ó indefinidamente*, luego o es el límite de todas las cantidades que decrecen sin fin ó indefinidamente.

Veamos ahora si las cantidades que crecen continuamente tienen algun límite verdadero. La idea que nos formamos en general de la cantidad es por la de los números; y como en la idea de número entra que dado un número se puede concebir otro una unidad mayor, dos unidades mayor, tres unidades mayor, ó tantas unidades mayor como queramos, resulta que las cantidades que crecen no tienen verdadero lí-

mite; porque no hay ninguna expresion á la qual se vayan acercando de manera que su diferencia sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea. Más, quando sabemos que una cantidad puede crecer y llegar á ser mayor que qualquiera otra cantidad, decimos que *sus incrementos no tienen fin*, esto es, que *nunca acaba de crecer* ó que *crece sin fin*; y como *crecer sin fin* equivale á *crecer indefinidamente*, resulta que aquella cantidad no tiene fin, y una cantidad de esta especie se ha dicho que se va acercando, ó es de la naturaleza de aquellas que *no tienen fin*. Para indicar que una cantidad crece sin fin ó indefinidamente, ó puede llegar á ser mayor que qualquier cantidad dada por grande que sea, se ha adoptado la voz de *infinito*, que se señala como ya hemos dicho [I. 328] con el signo $\frac{1}{0}=\infty$. Por consiguiente, el valor de qualquier cantidad se halla comprendido entre 0, límite verdadero de las cantidades que decrecen, é ∞, que es una especie de límite de las que crecen; pero es menester advertir que ni 0 ni ∞ son cantidades, pues que les falta la esencia de tal que es el poder crecer ó menguar.

Hemos dicho que ∞ se puede considerar como una especie de límite, porque para ser límite verdadero se necesitaba que la diferencia entre las cantidades que crecen sin fin é ∞ fuese menor que qualquier cantidad, lo que no puede ser; pues en efecto por grande que fuese la cantidad a, jamas se puede suponer que entre a é ∞ haya una diferencia tal como k, porque entonces añadiéndola á a se tendria $a+k=\infty$; cuya equacion daria á entender que ∞ solo podria llegar á crecer hasta ser igual con $a+k$; y como en la verdadera idea de ∞, se tiene que puede ser mayor que qualquier cantidad dada, se sigue que *no se puede considerar ∞ como el verdadero límite de las cantidades que crecen.*

479 Como en estas ciencias todo se hace por medio de razones, nos acomoda poner estos límites baxo el aspecto de tales; y así, pasaremos á expresarlos por medio de una razon; para lo qual no tendremos mas que considerar primero la razon $\frac{a}{x}$; si x crece, mengua dicha cantidad, y si vuelve á crecer, volverá á menguar y así sucesivamente; luego si suponemos que las variaciones de x sean el hacerse dos veces ó mas de dos veces mayor, como en este caso $\frac{a}{x}$ se irá haciendo dos veces ó mas de dos veces menor, resulta que $\frac{a}{x}$ podrá llegar á ser menor que qualquier cantidad dada; luego tendrá por límite 0, y como solo llegaria á ser 0 la expresion $\frac{a}{x}$ quando á x le diésemos la forma de una cantidad que podia crecer lo mas que quisiésemos, y esta es la de ∞, resulta

que el o tiene por expresion esta otra $\frac{a}{\infty}$; de manera que $\frac{a}{\infty}=0$ ó haciendo $a=1$ será $\frac{1}{\infty}=0$.

Ahora, si en la expresion $\frac{a}{x}$ suponemos que x mengua, crecerá dicha expresion; y si vuelve á menguar, se tendrá que volverá á crecer $\frac{a}{x}$; y como x puede menguar todo lo que se quiera, la expresion $\frac{a}{x}$ podrá crecer tambien todo lo que se quiera; y como el valor mayor que podemos concebir es quando x sea lo menor posible, resulta que como el valor menor posible que se puede concebir en x es o, y el mayor que podemos concebir en $\frac{a}{x}$ es ∞, tendremos que $\frac{a}{0}=\infty$, ó haciendo $a=1$ que $\frac{1}{0}=\infty$; luego al cero y al infinito les podemos suponer esta otra forma $\frac{1}{\infty}$ y $\frac{1}{0}$, que es lo mismo que sacamos [I. 328]. Ahora, si quisiéramos averiguar qué significaba $0\times\infty$, pondríamos en vez de o su valor en general, y tendríamos $\frac{a}{\infty}\times\infty=\frac{a\times\infty}{\infty}=a$;

lo que da á entender que quando se halla en el cálculo una multiplicacion indicada por los límites de las cantidades que crecen y las que decrecen, esta expresion equivale á una cantidad real.

Que la expresion $\frac{a}{0}$ es el símbolo con que se expresa que una cantidad puede ser mayor que qualquier cantidad dada, se puede tambien deducir de esta consideracion. Sea la expresion $\frac{a}{a-x}$ que sabemos es $=1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\&c.$ continuada quanto se quiera; pues si suponemos que $x=a$, se tiene $\frac{a}{a-a}=\frac{a}{0}=1+1+1+1+1+1\ldots\ldots$;

y como el segundo miembro indica la adicion continua de la unidad, que es el medio con que nos formamos la idea de los números, resulta que $\frac{a}{0}$ es el símbolo con que se expresa que una cantidad puede ser mayor que qualquiera otra dada.

480 Aunque sabemos ya que los límites entre que se hallan los va-

lores de las cantidades variables son en general o ó $\frac{0}{1}$ ó $\frac{1}{\infty}$ é ∞ ó $\frac{1}{0}$, no obstante las mas de las funciones tienen otros límites expresados por cantidades á las quales jamas pueden llegar, aunque á la variable de que se dicen funcion, se le den los valores comprendidos entre los límites o é ∞; esto sucede quando una funcion en su forma actual ó en otra que se le puede dar, se compone de una parte constante, y de otra variable que disminuye continuamente acercándose á su límite cero, en cuyo caso la parte constante es el límite de dicha funcion.

Si suponemos, por exemplo, que a es una cantidad constante, y que x y z son dos variables que decrecen continuamente acercándose al límite cero, a será el límite de $a-x$ y $a+z$; pues le corresponden las dos ideas del límite.

La funcion $\frac{ax}{x+a}$, en la que se supone que x aumenta indefinidamente, tiene tambien por límite a; pues haciendo la division resulta

$$\frac{ax}{x+a}=a-\frac{a^2}{x+a};$$

pero como la cantidad $\frac{a^2}{x+a}$ creciendo x tanto como se quiera, podrá disminuir tanto como se desee, resulta que la expresion $\frac{ax}{x+a}$ se podrá acercar tanto como se quiera á a; y ademas jamas llegará á ser igual con a, pues nunca $\frac{a^2}{x+a}$ podrá llegar á ser cero.

Hay funciones que reconocen dos límites determinados: uno para quando la variable decrece acercándose á su límite o; y otro para quando crece acercándose continuamente al límite $\frac{1}{0}$. Tal es la funcion $\frac{a+bx}{c+ex}$. En efecto, quando x se va acercando á su límite o, la expresion se acerca á $\frac{a}{c}$, sin que jamas pueda llegar á serle igual; y por consiguiente $\frac{a}{c}$ *será su límite.*

Para indagar qual es el límite quando x crece, dividiremos los dos términos de la funcion por la variable x, y se convertirá en $\frac{b+\frac{a}{x}}{e+\frac{c}{x}}$, la qual se acercará tanto mas á $\frac{b}{e}$, quanto x se acerque mas á $\frac{1}{0}$ ó ∞;

de manera que la diferencia entre $\dfrac{b+\dfrac{a}{x}}{e+\dfrac{c}{x}}$ y $\dfrac{b}{e}$ podrá ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea; y por lo mismo $\dfrac{b}{e}$ *será el límite de la funcion propuesta.*

Si suponemos ahora que α, β, γ, &c. son cantidades constantes positivas; a, b, c, &c. constantes positivas ó negativas, y que la variable x decrece indefinidamente acercándose á su límite cero en la serie

$ax^{\alpha}+bx^{\beta}+cx^{\gamma}+$&c.

será cero el límite de la suma de dicha serie; por consiguiente, si en el mismo supuesto tubiésemos la funcion $A+ax^{\alpha}+bx^{\beta}+cx^{\gamma}+$&c. representando A una cantidad qualquiera independiente de x, seria A su límite. Tambien se ve que si x aumenta sin fin en la serie

$\dfrac{a}{x^{\alpha}}+\dfrac{b}{x^{\beta}}+\dfrac{c}{x^{\gamma}}+$&c. su límite será 0;

y A lo será igualmente de la serie $A+\dfrac{a}{x^{\alpha}}+\dfrac{b}{x^{\beta}}+\dfrac{c}{x^{\gamma}}+$&c.

481 Entendido esto, pasaremos á demostrar que *en toda serie ordenada por las potencias de una sola variable, podemos darle á esta un valor tal que un término qualquiera sea mayor que la suma de todos los que le siguen.*

Para conseguirlo, supongamos que se tenga la serie

$$Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\text{\&c.}$$

todo está reducido á probar que á x se le puede dar un valor tal que cada término sea mas de dos veces menor que el antecedente, porque hemos visto [I. 293] que en la serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+$&c. cada término es igual á la suma de todos los que le siguen; y como aqui cada término es la mitad del anterior, se sigue que si en este supuesto un término qualquiera es igual á la suma de todos los que le siguen, quando uno qualquiera sea menor que la mitad del anterior, un término qualquiera será mayor que la suma de los que le siguen. Esto supuesto, todo está reducido á probar que en la serie $Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+$ &c. se puede dar á x un valor tal que

$$\frac{Ax^{\alpha}}{2}>Bx^{\beta},\ \frac{Bx^{\beta}}{2}>Cx^{\gamma},\ \text{y}\ \frac{Cx^{\gamma}}{2}>\text{\&c.}$$

Sea primero la serie ascendente, esto es, supongamos que $\alpha<\beta<\gamma<$&c; como el caso mas desfavorable es aquel en que los coeficientes A, B, C &c. van creciendo, lo demostraremos en este caso, y ademas supondremos que la relacion de dichos coeficientes sea variable. Representemos por Px^m y por Qx^{m+n} los dos términos consecutivos en que se encuentre la mayor relacion de los coeficientes. Será necesario darle á x un valor tal que $\frac{Px^m}{2} > Qx^{m+n}$; luego con tal que se verifique esta circunstancia, se tendrá demostrado lo que se deseaba; luego solo nos falta indagar *si exîste un número que cumple con esta condicion, y caso de que esto se verifique, determinarle.*

Para esto, observaremos que si dividimos esta desigualdad por x^m tendremos $\frac{P}{2}>Qx^n$ ó $Qx^n<\frac{P}{2}$, que dividiendo por Q da $x^n<\frac{P}{2Q}$, ó extrayendo la raiz n será $x<\sqrt[n]{\frac{P}{2Q}}$;

pero P y Q son dos cantidades dadas y constantes; luego $\frac{P}{2Q}$ tambien es una cantidad constante, y la raiz n de esta cantidad tambien será una cantidad dada ó que podremos determinar; y como por pequeña que sea esta cantidad podemos concebir en x otro valor menor [I. 325], resulta que siempre podemos concebir en x un valor que cumpla con la circunstancia de ser $\frac{Px^m}{2}>Qx^{m+n}$; y por consiguiente que *haga en la serie que un término qualquiera sea mayor que la suma de todos los que le siguen.*

Aquí hemos supuesto que en los dos términos consecutivos se diferenciaban los exponentes en una cantidad qualquiera para mayor generalidad; pero si suponemos que los exponentes solo se diferencien en la unidad, la demostracion se hace mas sencilla; pues todo está reducido á indagar el valor que se debe concebir en x paraque $\frac{Px^m}{2}>Qx^{m+1}$;

y como dividiendo por x^m tenemos $\frac{P}{2}>Qx$,

ó partiendo por Q que da $\frac{P}{2Q}>x$ ó $x<\frac{P}{2Q}$,

resulta que como P y Q son cantidades dadas, la expresion $\frac{P}{2Q}$ tambien

será dada; luego podremos concebir en x un valor menor que $\frac{P}{2Q}$, y por consiguiente que cumpla con la circunstancia pedida.

Sea ahora descendiente la serie $Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+$&c. esto es, supongamos que $\alpha>\beta>\gamma>$&c. y que los dos términos consecutivos en que la relacion sea mayor, sean Px^{m+n} y Qx^{m}, todo estará reducido á probar que $\frac{Px^{m+n}}{2}>Qx^{m}$; y como dividiendo por x^{m} tenemos

$$\frac{Px^{n}}{2}>Q, \text{ de donde } x^{n}>\frac{2Q}{P}, \text{ ó } x>\sqrt[n]{\frac{2Q}{P}},$$

resulta que dando á x un valor mayor que el de $\sqrt[n]{\frac{2Q}{P}}$ cumplirá con la circunstancia pedida; pero P y Q son cantidades finitas, luego la expresion $\frac{2Q}{P}$ tambien lo será y su raiz n; y como siempre podemos concebir en x un valor mayor que qualquiera otra cantidad dada, conciбiendo que se añaden unidades á su valor, resulta que podemos concebir en x un valor tal que cada término de la serie sea mayor que la suma de todos los que le siguen. Luego *el primero será mayor que la suma de todos los demas*, que era lo que se queria demostrar.

482 No todas las funciones tienen límites determinados, y como puede ser útil algunas veces conocer las que son susceptibles de ello ó no, vamos á investigarlo en algunos casos.

Sea la expresion $Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+$&c.; como en todos los términos se halla la variable x, resulta que si x crece, crecerá la expresion en la misma razon; si mengua, menguará del mismo modo; luego puede llegar á ser infinita, á ser cero, y aun á ser negativa sino son pares todos los exponentes α, β, γ, &c.

Consideremos ahora la expresion $\frac{Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\&c.}{A'x^{\alpha'}+B'x^{\beta'}+C'x^{\gamma'}+\&c.}$, que puede en ciertos casos tener límites determinados: y para descubrirlos resolveremos sus dos términos en dos factores, en que el uno sea la parte variable del primer término y el otro lo demas; por lo que se tendrá $\frac{x^{\alpha}(A+Bx^{\beta-\alpha}+Cx^{\gamma-\alpha}+\&c.)}{x^{\alpha'}(A'+B'x^{\beta'-\alpha'}+C'x^{\gamma'-\alpha'}+\&c.)}$, que para encontrar los límites relativos al incremento de x, supondre-

mos que la serie del numerador y la del denominador principian por el mayor exponente de x, esto es, que $\alpha>\beta>\gamma>$&c. y $\alpha'>\beta'>\gamma'>$&c. y distinguiremos tres casos, á saber, quando $\alpha>\alpha'$, $\alpha<\alpha'$ y $\alpha=\alpha'$; y atendiendo á que $\beta-\alpha, \gamma-\alpha$,&c. $\beta'-\alpha', \gamma'-\alpha'$,&c. son negativos y harán pasar al denominador la x en cada término, la expresion anterior se convertirá en

$$\frac{x^{\alpha-\alpha'}\left(A+\frac{B}{x^{\alpha-\beta}}+\frac{C}{x^{\alpha-\gamma}}+\&c.\right)}{A'+\frac{B'}{x^{\alpha'-\beta'}}+\frac{C'}{x^{\alpha'-\gamma'}}+\&c.}$$ para el 1.er caso,

en $$\frac{A+\frac{B}{x^{\alpha-\beta}}+\frac{C}{x^{\alpha-\gamma}}+\&c.}{x^{\alpha'-\alpha}\left(A'+\frac{B'}{x^{\alpha'-\beta'}}+\frac{C'}{x^{\alpha'-\gamma'}}+\&c.\right)}$$ para el 2.º

y en $$\frac{A+\frac{B}{x^{\alpha-\beta}}+\frac{C}{x^{\alpha-\gamma}}+\&c.}{A'+\frac{B'}{x^{\alpha'-\beta'}}+\frac{C'}{x^{\alpha'-\gamma'}}+\&c.}$$ para el 3.º

Solo la última es la que es susceptible de un límite determinado é igual con $\frac{A}{A'}$; la primera puede aumentar indefinidamente, porque en el numerador está el factor comun $x^{\alpha-\alpha'}$ que puede crecer tanto como se quiera; y la segunda puede llegar á ser tan pequeña como se quiera, pues se halla en su denominador la cantidad $x^{\alpha'-\alpha}$ que puede crecer tanto como se desee.

En la investigacion de los límites relativos al decremento de x, supondremos que el numerador y el denominador esten ordenados de modo que los exponentes vayan creciendo; siendo entonces α y α' los mas pequeños, y designando como antes los tres casos en que se tiene

$\alpha>\alpha'$, $\alpha<\alpha'$, $\alpha=\alpha'$,

resultará que la funcion propuesta solo en el último caso es susceptible de un límite determinado; porque las potencias positivas $x^{\beta-\alpha}$, $x^{\gamma-\alpha}$,&c. y sus correspondientes en el denominador, viniendo á ser menores al paso que x disminuye, las cantidades comprendidas en el paréntesis se apro-

xîman sin cesar á reducirse á su primer término, en cuyo caso suponiendo $\alpha=\alpha'$ se tiene por límite $\frac{A}{A'}$.

En los otros dos casos queda una potencia positiva de x en el numerador ó en el denominador como factor comun, lo que hace que el uno de estos términos disminuye siempre al mismo tiempo que x, y puede acabar por aniquilarse; de donde resultaria para la funcion propuesta un valor nulo en el primer caso, ó mayor que qualquier cantidad dada en el segundo.

Por lo demas notaremos que se encuentra el límite, sea para el incremento de x sea para su decremento, reduciendo el numerador y el denominador de la fraccion dada, cada uno á su primer término, que segun lo expuesto [§ 481] forma en ambos casos la parte mas considerable del valor de estas funciones.

483 *Dos cantidades ó expresiones que son el límite de una tercera son iguales entre sí.* Sea x una cantidad variable, y A y B dos cantidades constantes límites de x: voy á demostrar que son iguales. Porque sino fuese $A=B$, resultaria que habia entre ellas cierta diferencia que podríamos señalar, tal como K, y seria v. g. $A-B=K$ ó $A=B+K$; pero siendo B límite de x, no lo podria ser al mismo tiempo A por impedirlo la cantidad K que está en A ademas del valor de B: y como por el supuesto A tambien es límite de x, resulta que no puede haber dicha diferencia entre A y B; luego serán iguales. Este teorema que es el mismo que el [I. 327] es tal vez el mas fecundo del método de los límites; pues para indagar la expresion de una cantidad que no se conoce, no se hace otra cosa que ver de que otra cantidad conocida es límite, y hallar qué otro límite tiene la cantidad aquella é igualarlos.

Por exemplo, si quisiéramos averiguar la expresion de la superficie del círculo, veríamos si el círculo era límite de alguna otra figura; y como hallamos que es el límite de todos los polígonos inscriptos ó circunscriptos, porque siempre podemos inscribir ó circunscribir en un círculo un polígono regular, de manera que la diferencia entre su superficie y la del círculo sea menor que qualquier cantidad dada [I. 520 y 521], elegiremos el polígono circunscripto, veremos qué otro límite reconoce dicho polígono, y encontraremos que es el de su expresion; y como la superficie de un polígono es igual con $\frac{P\times R}{2}$ [I.518], resulta que si llamamos C á la circunferencia, y x á lo que el perímetro del polígono circunscripto lleva á la circunferencia, se tendrá $\frac{P\times R}{2}=\frac{(C+x)R}{2}$; y como si x va disminuyendo tanto como se desee, el límite de la expresion $\frac{(C+x)R}{2}$ ó del polígono circunscripto es $\frac{C\times R}{2}$,

resulta que la superficie del círculo y $\frac{C \times R}{2}$ son dos cantidades que son límite de una tercera; luego serán iguales entre sí y se tendrá

$$\text{Superficie de círculo} = \frac{C \times R}{2}$$

esto es, *á la mitad de la circunferencia por el radio*, que es la misma regla que obtuvimos en la Geometría [I. 522 cor. 1.°]

484 *Si dos cantidades ó funciones que varian, acercándose continuamente á sus límites respectivos, conservan siempre una razon constante como de* a *á* b; *esta razon será tambien la de los límites de dichas cantidades ó funciones.* Cuya proposicion es la misma que la [I. 328]

Para manifestar el uso de esta proposicion averiguaremos el valor de la superficie de las tres secciones cónicas, y principiaremos por la elipse.

Hemos visto [§242] que si desde el centro de la elipse con un radio igual al semiexe mayor se describe una circunferencia de círculo, y se llaman z, Z á las ordenadas correspondientes á estas dos curvas, se tiene siempre $z = \frac{b}{a} \times Z$, ó $z : Z :: b : a$.

Las superficies de la elipse y del círculo estan tambien en la misma relacion.

Para hacerlo ver, inscribiremos en la circunferencia BMM′B′ (fig. 147) un polígono qualquiera, y desde cada uno de sus ángulos tiraremos perpendiculares al exe BB′, y juntando los puntos en que estas rectas encuentran á la elipse, se formará un polígono que se hallará en lo interior de esta curva; uno qualquiera de los trapecios PNN′P′ de este polígono tendrá por medida $\frac{PN + P'N'}{2} \times PP'$ ó $(x - x') \times \frac{z + z'}{2}$.

El trapecio correspondiente PMM′P′ en el círculo tendrá por medida

$$\frac{PM + P'M'}{2} \times PP' \text{ ó } (x - x') \frac{Z + Z'}{2};$$

por lo qual será

$$PNN'P' : PMM'P' :: (x - x') \frac{z + z'}{2} : (x - x') \frac{Z + Z'}{2} :: z + z' : Z + Z';$$

y como $z : Z :: z' : Z' :: b : a$, se deduce que $z + z' : Z + Z' :: b : a$; por lo que estos trapecios estarán pues entre sí en la relacion constante de b á a; y las superficies de los polígonos inscriptos en las dos curvas estarán tambien en la misma relacion; y como esto tiene lugar qualquiera que sea el número de los lados de estos polígonos, esta relacion será tambien la de sus límites; de donde se sigue que designando por E y C las superficies de la elipse y del círculo se tendrá

$$\frac{E}{C} = \frac{b}{a} \text{ que da } E : C :: b : a;$$

es decir, que *la superficie de la elipse es á la del círculo como el segundo exe es al primero.*

Si señalamos con π la semicircunferencia cuyo radio es igual á 1, la superficie del círculo descrito sobre el exe mayor será πa^2, y se tendrá para la superficie de la elipse, llamándola E, la expresion $E=\pi ab$, y las superficies de dos elipses qualesquíera estarán entre sí en la razon de los rectángulos construidos sobre sus exes. Se llegaria al mismo resultado considerando la circunferencia descrita sobre el segundo exe.

La misma demostracion se podria aplicar á dos curvas qualesquiera, cuyas coordenadas correspondientes á las mismas abscisas tubiesen una relacion constante, y resultaria que esta relacion constante seria tambien la de sus superficies.

Como hemos visto [§ 285] que la hipérbola equilátera es con relacion á las otras hipérbolas lo que el círculo es con relacion á las elipses, resulta que aplicando á la hipérbola lo que acabamos de decir respecto de la elipse, podremos deducir que *la superficie de una porcion determinada de una hipérbola qualquiera, tiene con la equilátera que tubiese el mismo primer exe la misma relacion que el segundo exe al primero.*

Supongamos que se quiere indagar qual es el valor de la superficie de una porcion de parábola, esto es, del espacio comprendido por una rama de esta curva y la ordenada y abscisa correspondientes al extremo de dicho arco. Consideremos en efecto el segmento APM (fig. 148) terminado por el arco AM, la abscisa AP ó x, y por la ordenada PM ó z. Si se tira la recta MQ paralela al exe AX, y la AQ perpendicular, tendremos formado el rectángulo APMQ, en el qual se hallará comprendida la superficie del segmento parabólico APM. Ahora, si concebimos un polígono rectilineo qualquiera MM′M″... inscripto en la parábola, y desde los vértices tiramos paralelas á las AP y PM, representarán las coordenadas de estos vértices, y prolongadas formarán los rectángulos PP′M′p, P′P″M″p'.. que estarán comprendidos dentro del segmento parabólico; y los rectángulos QQ′M′q, Q′Q″M″q'... que estarán fuera de dicho segmento. Si representamos los primeros por P, P', P'', P''',....
y los últimos por p, p', p'', p''',.. se tendrá $P=z'(x-x')$ y $p=x'(z-z')$,

lo que da $\dfrac{P}{p}=\dfrac{z'(x-x')}{x'(z-z')}$;

y como los puntos M, M′, M″, &c. pertenecen á la parábola, tendremos

$z^2=px, z'^2=px'$, lo que da $x=\dfrac{z^2}{p}$ y $x'=\dfrac{z'^2}{p}$; de donde $x-x'=\dfrac{z^2-z'^2}{p}$,

y substituyendo estos valores en la relacion anterior, se tendrá

$$\frac{P}{p}=\frac{z'(x-x')}{x'(z-z')}=\frac{\dfrac{z'(z^2-z'^2)}{p}}{\dfrac{z'^2}{p}(z-z')}=\frac{z'(z+z')(z-z')}{z'^2(z-z')}=\frac{z+z'}{z'}.$$

Aplicando el mismo raciocinio á todos los demas lados del polígono, se tendrá esta serie de equaciones $\frac{P}{p}=\frac{z+z'}{z'}$, $\frac{P'}{p'}=\frac{z'+z''}{z''}$, $\frac{P''}{p''}=\frac{z''+z'''}{z'''}$, y siendo arbitrario el polígono MM'M''... se pueden suponer sus vértices de manera que llamando K á una constante qualquiera, elegida á arbitrio, se tenga siempre $\frac{z-z'}{z'}=K$, $\frac{z'-z''}{z''}=K$, $\frac{z''-z'''}{z'''}=K$, ...
que dan $z=Kz'+z'$, $z'=Kz''+z''$, $z''=Kz'''+z'''$
y así sucesivamente; con lo qual tendremos que las relaciones precedentes se convertirán en $\frac{P}{p}=2+K$, $\frac{P'}{p'}=2+K$, $\frac{P''}{p''}=2+K$....
por lo que serán iguales entre sí, qualquiera que sea el valor de K; luego tendremos $P:p::P':p'::P'':p''::$&c.$::2+K:1$
de donde [I. 268, teor. 1.º] $\frac{P+P'+P''+\&c.}{p+p'+p''+\&c.}=\frac{2+K}{1}=2+K.$
El numerador del primer miembro es la suma de los rectángulos inscriptos en la parábola, y el denominador la suma de los circunscriptos. Ahora, á medida que K disminuya, la relacion de estas cantidades se aproxîma mas y mas á 2; y se puede concebir á K tan pequeña que la diferencia sea menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea; y como en este mismo tiempo la suma de los rectángulos inscriptos se aproxîma á ser igual á los segmentos que se hallan dentro de la parábola, y la suma de los circunscriptos se acerca á los segmentos exteriores, se sigue que el límite de su relacion es igual á la relacion de estos segmentos; y representando la suma de los primeros por S, y la de los segundos por s, se tendrá $\frac{S}{s}=2$,
lo que da añadiendo la unidad á ambos miembros $\frac{S+s}{s}=3$;
y dividiendo la primera de estas equaciones por la segunda se tendrá $\frac{S}{S+s}=\frac{2}{3}$, de donde $S=\frac{2}{3}(S+s)$;
pero $S+s$ es la suma de los segmentos interiores y exteriores de la parábola, que componen la superficie del rectángulo $APMQ=AP\times PM=x\times z$; y como S expresa la suma de los interiores que equivalen en su límite al segmento parabólico APM, se deduce que *la superficie del segmento*

parabólico APM *es los dos tercios del rectángulo formado por la abscisa y ordenada.*

Las curvas que son tales que se puede señalar así exâctamente el valor de una porcion qualquiera de su superficie, se llaman *curvas quadrables*; por lo que la parábola se halla comprendida en este número. No sucede lo mismo con la elipse cuya superficie encierra la expresion de la circunferencia del círculo, que no se conoce con exâctitud.

485 *Si* a *es el límite de dos cantidades variables* x, y, *y* b *el de otras dos* z, u; *y se supone que al acercarse estas variables á sus límites respectivos* a, b, *sea siempre* u = *ó* > y, *y* x = *ó* > z, *los límites* a *y* b *serán iguales.*

Pues siendo siempre en el primer caso $u = y$ y $z = x$, esta proposicion no es otra que la [483] puesta en otros términos. En el segundo caso, supondremos $\frac{u}{y} = 1 + \alpha$, $\frac{x}{z} = 1 + \beta$, siendo α y β cantidades variables positivas, cuyos valores respectivos en el límite sean α', β'; y para conocer la razon de los límites haremos x é y iguales con a, y z y u iguales con b; y tendremos $\frac{b}{a} = 1 + \alpha'$, y $\frac{a}{b} = 1 + \beta'$,

resultado imposible á menos que no sea $\alpha' = 0 = \beta'$; haremos pues este supuesto y tendremos del mismo modo que en el caso antecedente $a = b$.

Por último, observaremos que si *se tienen dos funciones* F.x, f.x *de una misma variable* x, *el límite de la relacion de estas funciones será el mismo que la relacion de los límites.*

En efecto, si la relacion la expresamos por $\varphi.x$, se tendrá $\frac{F.x}{f.x} = \varphi.x$; ahora, cada una de estas funciones llegará á sus límites quando la variable x llegue al suyo, que supondremos ser a, y tendremos $\frac{F.a}{f.a} = \varphi.a$, pero $F.a =$ lím. de $F.x$, $f.a =$ lím. de $f.x$, y $\varphi.a =$ lím. de $\varphi.x$,

luego tendremos $\frac{\text{lím. de } F.x}{\text{lím. de } f.x} =$ lím. de $\varphi.x$,

que expresa la proposicion enunciada.

Como $F.x$ es una cantidad variable la podremos señalar con z, y por la misma razon podremos suponer $f.x = y$, y $\varphi.x = u$, lo que dará $\frac{z}{y} = u$

de donde $\frac{\text{lím. de } z}{\text{lím. de } y} =$ lím. de u,

que expresa que *el límite de la relacion de dos cantidades variables es lo mismo que la relacion de los límites de dichas cantidades.*

Estas proposiciones forman la base del método de los límites empleado por los antiguos Matemáticos, entre los quales se distinguió *Arquimedes*; aunque tanto este Geómetra como los demas no pusieron en abstracto dichas proposiciones, sino que empleaban el mismo raciocinio cada vez que necesitaban de ellas como hemos visto en la Geometría elemental.

DIGRESION

en que se quadra la parábola por los métodos de Arquimedes, y en que se manifiesta el método de Fermat para la rectificacion de la parábola cúbica.

486 A proporcion que los métodos modernos nos simplifican los antiguos y generalizan los resultados á que conducen, se hace mas interesante el conocimiento de ellos; porque si se reflexîona bien el orígen del nuevo cálculo que daremos á conocer pronto, baxo el nombre de *Cálculo infinitesimal*, se echará de ver que no ha sido en su principio sino un modo de explicar en abstracto los métodos de que usaron Arquimedes, Fermat, Vieta, &c. para demostrar todas sus proposiciones nuevas. Por esta causa quando me propuse explicar la Geometría con todo rigor á mis primeros discípulos del Seminario, intenté hacerlo por el método de Arquimedes; pero varié de intencion por las razones que expuse en el esc. II de la pág. 20 de mis Adiciones á Bails; y habiéndome hecho conocer la experiencia que de este modo faltan los medios de comparacion, y no se admira la invencion del *Cálculo infinitesimal* ni se conoce todo el mérito de su invencion y sencillez, he demostrado la teoría del círculo, cilindro, cono y esfera por los métodos de Arquimedes; y por esta misma causa vamos á exponer ahora los dos métodos con que este Geómetra quadró la parábola, y el que empleó Fermat para rectificar la cúbica.

El primer método que presenta, es fundándose en su primer libro *de Æquiponderantibus*, del qual pondremos aqui como lemas las proposiciones que se necesitan para su demostracion.

I. Los graves que pesan igualmente á iguales distancias del punto de apoyo son iguales.

II. Las magnitudes, sean comensurables ó incomensurables, equiponderan ó se ponen en equilibrio á distancias del punto de apoyo recíprocamente proporcionales á los pesos de los cuerpos.

III. El centro de gravedad de todo triángulo BVA (fig. 149) es el punto C en que se encuentran las rectas VK, BE tiradas desde dos qualesquiera de los ángulos al medio de los lados opuestos.

Cor. De donde se deduce que $CK=\frac{1}{3}VK$.

IV. El centro de gravedad C de todo trapecio BMNA (*fig.* 150) se halla en la recta XK que une los medios de los lados paralelos; pero en una distancia tal que se verifique esta proporcion

$$XC:CK::2BA+MN:2MN+BA.$$

Entendido esto, la primera proposicion de Arquimedes que nos hace al caso es la quarta suya; á saber:

Sea ABG (*fig.* 151, 152) *un segmento parabólico; y por el medio* D *de la* AG *concíbase una linea* BD *paralela al exe ó que sea el mismo exe, y tirando la* GB, *resultará que concibiendo otra linea qualquiera*

TZ *que sea paralela á* BD, *y corte á las* AG,BG, *será* DA:DZ::ZT:TI.

Porque si se tira la IK paralela á AG se tendrá BG:BT::DG:DZ, ó elevando al quadrado

$BG^2:BT^2::DG^2:DZ^2::DG^2:KI^2::$[§ 263]BD:BK::BG:BF,

por lo qual [I. 289] BG,BT,BF son continuo-proporcionales, y se verificará BG:BT::BT:BF,

de donde convirtiendo con el signo de ambigüedad á un tiempo paraque convenga á ambas figuras, y alternando se tendrá

$BG:BT::BG\pm BT:BT\pm BF::GT:TF$;

y como DG:DZ::BG:BT,

se tendrá por último DG=DA:DZ::GT:TF::TZ:TI que era L.Q.D.D.

Sea el segmento parabólico ABG *(fig.* 153*); si desde* A *se tira una linea* AZ *paralela al exe, y desde* G *la tangente* GZ, *se verificará que toda linea* KL *paralela á* AZ *quedará dividida de modo que se tendrá*

KH:HL::AK:KG.

Para demostrarlo, supongamos que sea BD el exe de la parábola, y concibamos tiradas las DBE,GBM, y por quanto DB=BE [§ 273] se tendrá [I. 477] KI=IL.

Tambien por lo acabado de demostrar se tiene KI:IH::AD:DK, y alternando sera KI:AD::IH:DK::[I.267]KI±IH:AD±DK::KH:AK. Luego duplicando los dos términos de la primera razon, se tendrá 2KI=KL:2AD=AG::KH:AK::[I.267]KL—KH:AG—AK::HL:KG; y alternando se tendrá KH:HL::AK:KG, que era L.Q.D.D.

Cor. De aqui se deduce alternando las dos primeras razones de la serie última, que KL:KH::AG:AK.

487 *Si se concibe el triangulo rectángulo* DBG (*fig.* 154) *en un plano vertical, y que se halle en equilibrio con un espacio* Z *suspendido al extremo* A *de la palanca* ABG, *cuyo punto de apoyo es* B, *y tal que* AB=BG, *se verificará que el espacio* Z *será igual á la tercera parte del triángulo* BGD.

Porque sea $BE=\frac{1}{3}BG$, y tírese EC paralela á BD, con lo qual tendremos que el centro de gravedad del triángulo GBD se hallará en la EC, y este se deberá considerar como si estubiese en E en equilibrio con *Z*, por lo qual será [485 II.]

triáng. GBD:*Z*::AB:BE::GB:BE::3:1, que era L.Q.D.D.

Al contrario, si $Z=\frac{1}{3}$ triang.BDG se equilibrarán Z y BDG.

488 *Si se considera ahora el triángulo* GDH (*fig.* 155) *suspendido en* B *por los dos puntos* B,G, *y que se halla en equilibrio con un espacio* Z *suspendido á una distancia* AB=BG, *se verificará igualmente que el espacio* $Z=\frac{1}{3}$ *triáng.* DGH.

Porque si al espacio *Z* se le añade el espacio $E=\frac{1}{3}$triáng.BGD, se tendrá que el triáng. BGD se equilibrará con el espacio *E*; y por lo mismo *Z*+*E* se equilibrará con todo el triángulo BHG;

luego $Z+E=\frac{1}{3}$ triáng.BGH$=\frac{1}{3}$ triáng.DGH$+\frac{1}{3}$ triáng.BDG;

y como $E=\frac{1}{3}$ triáng. BDG será $Z=\frac{1}{3}$ triáng. DGH, que era L.Q.D.D.

489 *Si se concibe el triángulo* GED (*fig.* 156) *en equilibrio con el espacio Z, colocado á una distancia* AB *del punto de apoyo B igual con* EG, *y el espacio* C *tal que* AB:BE::GDE:C, *vamos á demostrar que Z es menor que el triángulo* GDE, *pero mayor que el espacio* C.

Porque supongamos que el centro de gravedad del triángulo EGD se halle en la perpendicular HF, y será [485 II.] Z:triang.GDE::HB:BA;
luego $Z<$triáng.GDE.
Ahora HB:BA<EB:BA::C:triáng.GED;
luego Z:EGD>C:EGD, de donde resulta $Z>C$ que era L.Q.D.D.

Lo mismo se demostraria del triángulo DCG suspendido como lo demuestra la fig. 157.

490 *Sea la palanca* ABG (*fig.* 158), *cuyo punto de apoyo* B *está en su medio; y concíbase el trapecio* BDCH *que tiene rectos los ángulos en* B *y* H, *equilibrado con el espacio Z; vamos á demostrar que dicho espacio Z es menor que el espacio* L, *tal que* AB:BH:: trap.BDCH:L.

Porque si suponemos que el centro de gravedad se halle en la recta EF perpendicular á AG se tendrá

trap.BDCH:Z::AB:BE>AB:BH::trap.BDCH:L;

luego $Z<L$ que era L.Q.D.D.

Tambien se verifica la misma proposicion quando el trapecio es DCTR y se halla colocado como lo representa la fig. 159.

Cor. Luego con mayor razon será $Z<$trapecio BDCH.

491 *Sea la palanca* AG (*fig.* 160), *cuyo punto de apoyo se halle en su medio* B; *y concibamos que el trapecio* EHCD *se equilibre con el espacio* Z: *vamos á demostrar que* Z *es mayor que un espacio* L *tal que* AB:BE:: trap. DEHC:L. *y menor que un espacio* M *tal que*

AB:BH:: trap. DEHC:M.

Porque supongamos que el centro de gravedad del trapecio DEHC se halle en la KN paralela á ED, y tendremos
trap. DEHC:Z::AB:BK<AB:BE:: trap.DEHC:L, por lo qual $Z>L$;
pero trap DEHC: M::AB:BH<AB:BK::trap.DEHC:Z,
luego $Z<M$ que era L.Q.D.D.

Del mismo modo se verifica la proposicion quando el trapecio CDTR está dispuesto como lo representa la fig. 161.

492 *Sea* GKB (*fig.* 162) *un espacio parabólico comprendido por la parábola y la doble ordenada* GB *al exe; si por el punto* B *se tira la* BD *perpendicular á* BG *hasta que encuentre á la* GD *tangente en* G *del arco* BKG, *se divide la* BG *en un número qualquiera de partes iguales* BE,EZ,ZH,HI,IG, *en los puntos de division se conciben las* ES, ZT,HV,IX, *y se unen los puntos* F,K,P,O *en que estas lineas encuentran á la parábola, con el* G; *vamos á demostrar que el triángulo* BGD *es menor que el triplo de los trapecios* CE,LZ,HM,NI *y del triángulo* XIG; *pero mayor que el triplo de los trapecios* ZF,HK,IP *y del triangulo* IOG.

Porque sea $AB=BG$, y suspéndanse en A los espacios $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, que se equilibren respectivamente con los trapecios DE,SZ,FH,VI, y con el triángulo XIG, y por lo mismo se tendrá que $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$ se equilibrarán con el triángulo DBG que equivale á los trapecios juntos con el triángulo XIG.

Ahora, [486 cor.] GB=AB:BE::ES:EF::triáng.ESG:triáng.EFG; tambien se tiene ES:EF::BD:BC::triáng.BDG:triáng.BCG;
por lo qual será
BDG:BCG::ESG:EFG::BDG—ESG:BCG—EFG::trap.DE:trap.CE;
luego si en vez de la primera razon de esta serie de razones iguales ponemos su igual ES:EF ó AB:BE, que es igual con esta en virtud de la primera, se tendrá AB:BE::trap.DE:trap.CE;
y como α se equilibraba con CE, se tendrá [490 cor.] trap. CE$>\alpha$. Del mismo modo se demostraria que trap. LZ$>\beta$, trap.MH$>\gamma$, trap.NI$>\delta$, y por último que el triángulo XIG$>\varepsilon$;
luego sumando se tendrá CE+LZ+MH+NI+XIG$>\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$.

Ahora, siendo trap.SZ:trap.FZ::ES+ZT:EF+Z punto (porque los trapecios de igual altura son entre sí como la suma de sus bases paralelas), y ademas se tiene ES:EF::ZT:Z punto::ES+ZT:EF+Z punto; resultará, por tener esta proporcion y la anterior comun la segunda razon, que trap.SZ:trap.FZ::ES:EF::[486 cor.] AB:BE, y se tendrá del mismo modo que antes [491] que trap.FZ$<\beta$,
y que trap.KH$<\gamma$, trap.PI$<\delta$, y por último que triáng.OIG$<\varepsilon$;
luego sumando será FZ+KH+PI+OIG$<\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$;

y siendo [§483] $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=\dfrac{\text{triáng. DBG}}{3}$ se deduce la proposicion.

Si la BG no fuese una doble ordenada al exe, entonces la figura quedaria representada por la fig. 163, la proposicion seria la misma y tambien la demostracion.

493 *Sea el segmento parabólico* BKG *(fig. 164), y concibamos por* B *una paralela al exe hasta que encuentre á la* GD *tangente en* G: *digo que dicho segmento es igual al espacio* $Z=\frac{1}{3}$ *triáng.*BDG.

Si puede suceder, sea primero Z$<$seg.BKG, divídase la BD en las partes iguales BC,CQ,QR,RY,YD, de modo que sea el
triang. BGC$<$seg.BKG—Z, y se tendrá Z$<$segm.BKG—triáng.BGC;
tírense desde G las GC,GQ,GR,GY, y por los puntos F,K,P,O en que encuentren á la parábola, tírense las ES,ZT,HV,IX paralelas á BD: y tendremos que las partes BE,EZ,ZL,LH,HI,IG tambien serán iguales;
porque DC:CB::SF:FE::[§486] GE:EB,
y DQ:QB::TK:KZ::GZ:ZB,&c.
de donde resulta que EB es la quarta parte de GE, y ZB las dos terceras partes de GZ,&c.

Ahora, por quanto BC=CQ será EF=FL, y el trap.FZ=trap.FK;

tambien por ser $Z\varphi$=KM, será trap.φH=trap.KP, é igualmente trap.ψI=trap.PO, y triáng.IGx=OGX; luego el triáng. BGC=á los trapecios BF+FK+KP+PO+triáng.OGX, y por lo mismo $Z=\frac{1}{3}$ triáng.BDG<segm.BKG—(trap^s.BF+FK+KP+PO+triáng OGX)<trap^s.FZ+KH+PI+triáng.OIG, contra lo demostrado en la proposicion precedente; luego no se puede verificar que Z<segm.BKG.

Si se dice que Z>segm.BKG, supongamos que se haya llegado al triáng.BGC<Z—segm.BKG; de donde segm.BKG+triáng.BGC<Z, esto es, el segmento BKG + los trap^s.BF+FK+KP+PO+triáng.OGX<$\frac{1}{3}$ trián.BDG; luego con mayor razon se verificará que los trapecios CE+LZ+MH+NI+triáng.XIG<$\frac{1}{3}$triáng.BDG, que es tambien contra lo demostrado en dicha proposicion.

Luego se tendrá Z= segm. BKG=$\frac{1}{3}$ triáng. BGD.

Demostrado esto, se deduce que todo segmento parabólico ABC (*fig.* 165) *tiene con el triángulo* ABC *de la misma base y altura la razon de 4 á 3.*

Para demostrarlo, tírese la tangente CF que encuentre en E al exe DB, y por A la AF paralela, y tendremos que por ser DB=BE[§273], se verificará que triáng. DEC=$\frac{1}{4}$triáng.AFC=2triáng.DBC=triáng.ABC; pero el segm. ABC=$\frac{1}{3}$triáng. AFC, luego triáng. ABC:segm.ABC::$\frac{1}{4}$AFC:$\frac{1}{3}$AFC::$\frac{1}{4}$:$\frac{1}{3}$::3:4; ó invirtiendo será segm.ABC:triáng.ABC::4:3 que era L.Q.D.D.

Cor. De aqui resulta que segm. ABC=$\frac{4}{3}$triáng. ABC=$\frac{2}{3}$ paralelogramo ACNM; y espacio parabólico DBC=$\frac{2}{3}$ rectángulo DCNB, que es lo mismo que hallámos [484].

494 Para determinar geométricamente esto mismo, advierte Arquimedes que en un espacio cerrado por una curva y una recta, llama *base* á esta recta, *altura* á la mayor perpendicular que desde la curva se puede tirar á la base, y *vértice* al punto de la curva desde donde se baxa la mayor perpendicular.

Si en el segmento ABC (*fig.* 165*) *se concibe desde el medio de la base la* DB *paralela al exe, el punto donde esta linea encuentre á la parábola será el vértice.*

Porque supongamos que la EF sea tangente de la parábola en B, y que se baxe la BG perpendicular á AC; y tendremos que por ser EF paralela á la base AC, y estar toda la curva debaxo de esta tangente, será BG la mayor perpendicular; y por tanto será B el vértice del segmento ABC, que era L.Q.D.D.

495 *Si en el segmento parabólico* ABC (*fig.* 166) *se tiran dos rectas* DB, FE *paralelas al exe, la una tal como la* DB *desde la mitad de la base, y la otra* FE *desde la mitad de la mitad, se tendrá* DB:EF::4:3.

Porque si se tira la EG paralela á la base AC se tendrá

BD:BG::DA^2:GE^2::DA^2:DF^2::4:1;

y convirtiendo, comparando con la diferencia será $BD:BD-BG=GD=FE::4:4-1=3$, que era L.Q.D.D.

496 *Si en un segmento parabólico ABC (fig. 167) se inscribe un triángulo ABC que tenga la misma base y altura, el triángulo inscripto será mayor que la mitad del segmento.*

Porque si se concibe la tangente EF que será paralela á la base, y se levantan en A y C las AE,CF paralelas al exe, se tendrá que el paralelogramo AEFC=2 triáng. ABC>seg. ABC,

por lo qual triáng. $ABC > \frac{\text{seg. } ABC}{2}$.

Cor. *De aqui se deduce que á este segmento se le puede inscribir un polígono tal que los segmentos comprendidos por sus lados y los arcos de curva, sean menores que qualquier espacio dado.*

Porque si en los segmentos AGB,CHB se inscriben triángulos, estos quitarán mas de la mitad de los segmentos AGB,CHB; y haciendo lo mismo en los segmentos que resulten, se llegará por último á tener su suma menor que un espacio qualquiera dado.

497 *Si en un segmento parabólico ABC (fig. 168) se inscribe un triángulo ABC que tenga la misma base y altura; y se inscriben del mismo modo otros triángulos AHB,BFC á los segmentos que quedan, se verificará que el triángulo ABC inscripto en todo el segmento será óctuplo de qualquiera de los triángulos AHB,CFB.*

Porque siendo $GI:DB::AI:AB::2:4$ y [§495] $GH:DB::3:4$, se tendrá comparando los antecedentes de estas dos proporciones $GI:GH::2:3$; de donde resulta que $GI=2HI$, y el triángulo $IAG=2$ triáng. HAI; por lo que triáng. $BAD=4IAG=8$ triáng. IAH; de donde resulta que triáng. $ABC=2BAD=8$ triáng. AHB, que era L.Q.D.D.

Cor. 1.º De aqui se deduce que triáng. $AHB+CFB=\frac{1}{4}$ triáng. ABC.

Cor. 2.º *Tambien podemos deducir que si se tiene un segmento parabólico ABC (fig. 169) y un número qualquiera de espacios X,Y,Z en razon quádrupla, y el espacio mayor X se supone igual con el triángulo ABC de la misma base y altura que el segmento, se tendrá que todos estos espacios son menores que el segmento ABC.*

Porque si en los segmentos AHB,CFB se inscriben los triángulos AHB,CFB de la misma base y altura, y otros del mismo modo en los segmentos APH,COF,HMB,FNB, se tendrá que

triáng.s $AHB+CFB=\frac{1}{4}$ triáng. $ABC=\frac{1}{4}X=Y$;

del mismo modo se tiene

triáng.s $APH+HMB=\frac{1}{4}AHB$, y triáng.s $COF+FNB=\frac{1}{4}CFB$;

por lo que

triáng.s $APH+HMB+COF+FNB=\frac{1}{4}AHB+\frac{1}{4}CFB=\frac{1}{4}Y=Z$;

y como estos triángulos juntos son menores que el segmento ABC, resulta que los espacios X,Y,Z tambien serán menores.

498 *Si se conciben las magnitudes* D,C,B,A, *en razon quádrupla*, *esto es*, *tales que* D:C:B:A::64:16:4:1,
se verificará que $D+C+B+A+\frac{1}{3}A:D::4:3$;
porque siendo $D=4C$ será $\frac{1}{3}D=\frac{4}{3}C=C+\frac{1}{3}C$;
y del mismo modo se tendrá $\frac{1}{3}C=B+\frac{1}{3}B, \frac{1}{3}B=A+\frac{1}{3}A$;
luego será $\frac{1}{3}D=C+B+\frac{1}{3}B=C+B+A+\frac{1}{3}A$ y $\frac{4}{3}D=D+C+B+A+\frac{1}{3}A$;
de donde poniendo en proporcion se tendrá $D+C+B+A+\frac{1}{3}A:D::4:3$
que era L.Q.D.D.

Cor. De aqui resulta que la figura inscripta en el segmento es menor que $\frac{4}{3}$ del triángulo ABC; pues se compone de las magnitudes X,Y,Z. en la razon de 4 á 1, de las quales la mayor X es igual al triáng. ABC.

499 *Todo segmento parabólico* ABC (*fig.* 169) *es igual á* $\frac{4}{3}$ *del triángulo* ABC *que tenga la misma base y altura.*

Porque supongamos $Z=\frac{4}{3}$ triáng. ABC, y si puede suceder sea primero segm. ABC$>Z$, inscríbase en este la figura APHMBNFOC compuesta de triángulos, de manera que
segm.ABC—fig.APHMBNFOC<seg.ABC$-Z$,
y se tendrá $Z<$fig. APHMBNFOC;
pero esta figura es menor que $\frac{4}{3}$ triáng. ABC, luego con mayor razon $Z<\frac{4}{3}$ triáng. ABC contra el supuesto.

Supongamos que segm. ABC$<Z$, y concíbase una serie de magnitudes que decrezcan en progresion quádrupla, principiando por el triáng. ABC y terminando en ω, de modo que sea $\omega<Z-$segm.ABC; y si llamamos S á la suma de dichas magnitudes, se tendrá [§ 498] $S+\frac{\omega}{3}=Z$,
por lo que $\omega<S+\frac{\omega}{3}-$segm. ABC;
de donde resulta que el segmento ABC$<S$, contra lo demostrado en el corolario antecedente; luego si el segmento ABC no puede ser mayor ni menor que $\frac{4}{3}$ triáng.ABC, resulta que será igual, que era L.Q.D.D.

Cor. De aqui resulta 1.° que si por B se tira la FG (fig. 170) paralela á AC, y se concluye el paralelog.AG, será segm.ABC$=\frac{2}{3}$ paralelog.AG; porque triáng.ABC:paralelog.AG::3:6, y triáng.ABC:segm.ABC::3:4; luego comparando los conseqüentes de estas proporciones, se tendrá
paralelog.AG:segm.ABC::6:4,
de donde segm. ABC$=\frac{4}{6}$ paralelog. AG$=\frac{2}{3}$ paralelog. AG.
2.° Semisegm. ADB$=\frac{2}{3}$ADBF, y AYBF$=\frac{1}{3}$ADBF$=\frac{1}{2}$ semisegm. ADB.
3.° De aqui resulta el poder construir fácilmente un quadrado igual con el segmento. Porque si se prolonga DB hasta E, de modo que se tenga BE$=\frac{1}{3}$BD ó ED$=\frac{4}{3}$BD, y se tiran las EA,EC, resultaria que el triángulo AEC$=$ al segm.ABC; y construyendo un quadrado igual al triángulo AEC será igual con el segmento parabólico.

500 Entendido esto, pasemos á rectificar la parábola cúbica por el método de Fermat.

Este Geómetra principia su disertacion diciendo: »Aun no han conseguido los Geómetras, á lo menos que yo tenga noticia de ello, el rectificar exâctamente una curva que sea puramente geométrica. Pues lo que aquel sutil Matemático ingles descubrió y demostró no hace mucho, á saber, que la cicloide primaria era quádrupla del diámetro del círculo generador, esto parece que tiene su limitacion segun el parecer de Geómetras muy doctos; pues estos aseguran que es tal la ley y órden de la naturaleza que no permite que se halle una linea recta igual á una curva, sin que de antemano se haya supuesto otra recta igual á otra curva. Lo qual hallan, y nosotros no lo negamos, que se verifica efectivamente en el exemplo propuesto de la cicloide; pues consta que la descripcion de la cicloide necesita de la igualdad de otra curva con una recta, esto es, exîge que la circunferencia del círculo generador sea igual con la recta que sirve de base á la misma cicloide. Más nosotros haremos ver quan verdadera sea esta ley de la naturaleza que establecen, y quan peligroso el pasar de uno que otro experimento á establecer inmediatamente un axîoma. Pues demostraremos que una curva verdaderamente geométrica, y para cuya construccion no se suponga que ha precedido la igualdad de tal ó tal curva con una recta, es igual á una recta dada, y lo executaremos con la posible brevedad.»

La primera proposicion que demuestra es: *Si en una curva qualquiera* AHMG (*fig.* 171) *que sea curva solo respecto de un parage, por exemplo, una de las infinitas parábolas en que las tangentes concurran con la base* AF *y con el exe* FG *fuera de la curva, se toma un punto qualquiera* H *por el que se tire la tangente* IHK, *en la que tomando de una y otra parte los puntos* K *é* I, *se baxen las perpendiculares* IB, KD *á la base* AF *que corten á la curva en los puntos* R *y* M: *digo que la parte* HI *de la tangente es menor que la parte de curva* RH; *y la parte* HK *de la tangente es mayor que la parte de curva* HM.

Porque encontrando la tangente KI á la base AF fuera de la curva, el ángulo GHI será agudo, y la perpendicular que desde H se tire á la BIV caerá por mas arriba de los puntos R, I; y será $HV < HI$, y $HI <$ que la recta RH; y como la curva $HOR > HR$ se deduce que con mayor razon curva $HOR > HI$. Ahora, desde el punto K concíbase á la misma curva la tangente KN, y báxese la perpendicular NE, y tendremos por lo acabado de probar que la recta $KN <$ curva NPM; pero segun Arquimedes (*) la suma de las tangentes HK, KN es mayor que todo el

(*) *El autor cita aqui á Arquímedes, el qual pone por* 2.º *axîoma esta proposicion en el* 1.er *libro* de Sphæra et Cilindro. *Esta proposicion no es un verdadero axîoma como hemos dicho* [I. 338 *nota*]: *conociendo que toda la Geometría tanto elemental como sublime tienen por base á esta proposicion, traté de demostrarla, lo que hice por primera vez en mis* Adiciones á la Geometría de D. Benito Bails.

arco de curva HN; luego la parte HK de la tangente es mayor que la curva HM que era L.Q.D.D.

Cor. De aqui se sigue que si desde los puntos K é I se tiran perpendículares al exe que encuentren á la curva en los puntos O y P, se verificará que la tangente HI> curva HO, HK< curva HP. Porque si se concibe invertida la figura de modo que el exe se transfiera al lugar de la base, no solo será semejante en este caso la demostracion sino que será la misma.

De la misma construccion se deduce igualmente que si las rectas BC y CD son iguales, las partes HI, HK de la tangente serán tambien iguales entre sí.

Para la medicion de las lineas curvas no usamos, dice Fermat, de figuras inscriptas y circunscriptas á la manera de Arquimedes, sino solo de circunscriptas, compuestas de partes de tangentes, manifestando dos series de tangentes de las que la una es mayor que la curva, y la otra menor, pues parece esto mas fácil y elegante á los analistas. Y así, decimos *que es posible, como quiere Arquimedes, circunscribir á qualquiera de las curvas dichas anteriormente, dos figuras que se compongan de rectas, de las quales la una exceda á la curva en un intervalo menor que qualquiera otro dado, y que la otra se halle excedida por la curva en un intervalo tambien menor que otro qualquiera dado.*

Sea APTYNOH (fig. 172) una curva de las dichas; divídase la base AG en un número qualquiera de partes iguales AB, BC, CD, DE, EF, FG, y desde los puntos B, C, D, E, F, G levántense las perpendiculares BQ, CV, DZ, ER, FM, GI que encuentren á la curva en los puntos P, T, Y, N, O. Concíbanse tambien las tangentes AQ, PV, TZ, YR, NM, OI, y tendremos por la primera proposicion

AQ>AP, PV>PT. TZ>TY, YR>YN, NM>NO, OI>OH;

luego la figura compuesta de estas tangentes será mayor que la curva.

Ahora, en la misma curva que para mayor claridad representaremos en la (*fig.* 173), dividamos la base AG en el mismo número de partes iguales en los puntos A, B, C, D, E, F; y desde ellos levántense las perpendiculares AT, BR, CQ, DO, EL, FI, que encuentren á la curva en los puntos S, P, N, M, K: desde el punto S en esta figura concíbase la tangente ST que encuentre á la perpendicular AT, y en los puntos P, N, M, K, H, concíbanse las tangentes PR, NQ, MO, KL, HI que encuentren á las perpendiculares BS, CP, DN, EM, FK en los puntos R, Q, O, L, I, y tendremos por la 1.ª proposicion ST<AS, PR<PS, NQ<NP, MO<MN, KL<KM, y la última HI (que es paralela á la base) <HK. Luego la figura que se componga de todas estas tangentes será menor que toda la curva.

Ahora, como por el corolario de la proposicion primera, las partes de las tangentes que desde un mismo punto de la curva se toman á uno y otro lado son iguales, por serlo las partes de la base, se deduce que como las figuras 172 y 173 representan la misma curva se tendrá que

la parte ST de la 2.ª es igual á la PV de la 1.ª pues el punto S en la 2.ª es de todo punto el mismo que el P de la 1.ª, y las partes AB,BC de la base son iguales en ambas; luego se tendrá ST=PV, y del mismo modo PR=TZ,&c. por lo que resulta que solo la 1.ª de la fig. 172 y la última de la 173 es la que no tiene igual en la fig. opuesta. Luego el exceso que la figura 172 lleva á la otra es el que la tangente AQ lleve á la tangente IH; pero la recta IH de la fig. 173 es igual con FG=AB; luego la fig. 172 compuesta de las tangentes que son mayores que los arcos de curva, excede á la fig. 173 compuesta de las tangentes menores que los arcos de curva en lo que la tangente AQ excede á la parte AB correspondiente de la base.

Y así, si queremos circunscribir á una curva dos figuras que la una sea mayor que la curva y la otra menor, pero que se diferencien en un intervalo menor que qualquiera otro dado, será muy fácil la construccion; pues siendo dada, por el método ya conocido de las tangentes, la tangente del punto A, será dado el ángulo QAB; y como el ángulo QBA es recto, queda determinado el triángulo, y por lo mismo es conocida la relacion de AQ:AB. Pero se ha de observar que la division de la base se haga de tal modo que la diferencia de las rectas sea menor que qualquiera otra dada; lo que conseguiremos buscando dos rectas que esten en la relacion dada, que se excedan en una recta que sea menor que la dada. Este problema es fácil, y se ha de procurar que la porcion AB de la base no sea mayor que la menor de las dos que satisfacen al problema (*).

Y habiendo hallado de este modo dos figuras circunscriptas á la curva, una mayor y otra menor que la expresada curva, que se excedan mutuamente en un intervalo menor que qualquiera otro dado, con mayor razon la mayor de las circunscriptas excederá á la curva en un intervalo aun menor; y la menor de las circunscriptas será excedida por la curva en un intervalo aun menor.

Y así, por nuestro método, se ve que por una doble circunscripcion se consigue lo que por el método de Arquimedes, quando se trata de la medicion de las lineas curvas. Lo que basta se haya aconsejado y demostrado una sola vez.

501 Esto supuesto, se puede establecer con toda seguridad *que se puede hallar una curva verdaderamente geométrica igual á una recta*

(*) *Para esto basta dividir la base* AB *en dos partes iguales, y luego en otras dos, &c; pues en este caso la diferencia se hará dos veces menor á cada operacion, y resultará lo que se enuncia en virtud de la proposicion primera del libro* 10°. *de Euclides que es la que nosotros hemos vuelto á introducir en los libros elementales por las razones expuestas en la nota de la página* 59 *del quaderno de exámenes del Seminario del año de* 1804.

dada; *y esta es aquella parábola en que se verifica que los cubos de las ordenadas al exe son entre sí como los quadrados de las abscisas*; y paraque los Geómetras no duden de ello, lo demuestra Fermat en estos términos.

Sea MIVA (fig. 174) la parábola indicada, cuyo vértice sea A, el exe AN, y en la qual tomado qualquier punto I, y tiradas las perpendiculares ú ordenadas MN, IF al exe, se tenga $MN^3 : IF^3 :: NA^2 : FA^2$, vamos á demostrar *que la curva* MIA *es igual á una recta*; y si á la relacion constante de $MN^3 : NA^2$ la llamamos p se tendrá

$$MN^3 : NA^2 = p, \text{ ó } MN^3 = p \times NA^2 \text{ ó } z^3 = px^2;$$

y determinaremos el parámetro p por esta 4.ª proporcional $x^2 : z^2 :: z : p$, que se supondrá representado por la AD perpendicular á la misma AN. Concíbase la tangente IOE en el punto I, y tendremos por el método de las tangentes (*), que FA=2AE y por tanto

$$FE : AF :: 3 : 2, \text{ y } EF^2 : AF^2 : 9 : 4;$$

ahora, quitando de AD su novena parte CD,
y dividiendo lo que quede en dos partes iguales en B se tendrá
$DA : AB :: 9 : 4 :: EF^2 : AF^2$, por lo que $AB \times EF^2 = DA \times AF^2 = IF^3$;

(*) *El método de las tangentes á que se refiere Fermat, es un método nuevo que él habia inventado para tirar tangentes á las curvas. Con el objeto de darle á conocer y de manifestar que en efecto* FA=2AE, *vamos á aplicarle á esta parábola cúbica.*

Supongamos que BD (*fig.* 174 *) *sea la parábola de que hablamos*; BE *una tangente en* B *que encuentre al exe en* E; *si por un punto qualquiera de esta tangente tal como* O *se baxa la* OI *perpendicular á* CE, *y por* B *se baxa la ordenada* BC, *se tendrá que* $CD^2 : DI^2 > BC^3 : OI^3$; *pero como por la semejanza de los triángulos se tiene*

$BC^3 : OI^3 :: CE^3 : IE^3$ *resultará* $CD^2 : DI^2 > CD^3 : IE^3$;

ahora, por suponerse que el punto donde se quiere tirar la tangente es un punto dado, serán conocidas las coordenadas DC, BC; *y llamando* D *á la* DC, A *á la* CE, *y* E *á la* CI, *se tendrá*

$$D^2 : (D-E)^2 > A^3 : A^3 - 3A^2E + 3AE^2 - E^3,$$

y multiplicando extremos y medios será

$$D^2A^3 - 3A^2ED^2 + 3AE^2D^2 - E^3D^2 > D^2A^3 - 2DEA^3 + E^2A^3,$$

que suprimiendo lo que es comun se convertirá esta expresion en

$$-3A^2ED^2 + 3AE^2D^2 - E^3D^2 > E^2A^3 - 2DEA^3,$$

y dividiendo por E *será* $3AED^2 - 3A^2D^2 - E^2D^2 > EA^3 - 2DA^3$, *con esta preparacion el método de Fermat consiste en suponer ahora* $E=0$, *convertir el signo de desigualdad en el de igualdad y determinar el valor que resulta para* A;

luego executando esto se tendrá $-3A^2D^2 = -2DA^3$, *que da* $3D = 2A$ *ó* $A = \frac{3}{2}D$; *por lo qual* $CE = \frac{3}{2}DC$ *ó* $DC = \frac{2}{3}CE$, *de donde resulta por último* $DE = \frac{1}{3}CE$ *y* $DC = 2DE$.

luego se tendrá

$EF^2:IF^2::IF:AB$ y componiendo $EF^2+IF^2=IE^2:IF^2::IF+AB:AB$; mas si se tira desde I la IH perpendicular á la base, y otra perpendicular qualquiera GQVO que encuentre á la ordenada IF en Q, á la curva en V y á la tangente en O, se tendrá $IO^2:IQ^2=HG^2::IE^2:IF^2$; como estas dos proporciones tienen una razon comun, formando proporcion con las otras dos razones, se tendrá $IO^2:HG^2::IF+AB:AB$.

De aqui se sigue que si la recta MN se pone á continuacion de la recta $NX=AB$, se tendrá siempre $IO^2:HG^2::HX:NX$,

ó como á causa de las paralelas YR, IH, OG se tiene $IO:HG::IY:RH$, resultará $IY^2:RH^2::HX:NX$.

Supongamos aun que sea AXE (fig. 175) la parábola cuya equacion es $z^3=px^2$, en que supondremos que AD sea el parámetro, CD la novena parte de este y AB la mitad de BC; y supongamos que se divide la base EI en quantas partes iguales se quiera EF, FG, GH, HI, y en los puntos F, G, H levántense las perpendiculares FX, GY, HZ que encuentren á la curva en los puntos X, Y, Z. Por los puntos E, X, Y, Z tírense las tangentes ER, XS, YT, ZV que encuentren á las perpendiculares FX, GY, HZ, IA prolongadas, en los puntos R, S, T, V. Colóquese la $IK=AB$ á continuacion de la EI y tendremos

$ZV^2:HI^2::HK:KI$; $YT^2:GH^2::GK:KI$; $XS^2:FG^2::FK:KI$;

y por último $ER^2:EF^2::EK:IK$.

Esto supuesto, levántese en K la KL perpendicular á EK, y hágase $KL=KI=AB$; concíbase por el punto K como vértice y con el exe KE descrita una parábola vulgar KMQ, cuyo parámetro sea KL; y prolónguense las FX, GY, &c. hasta que encuentren á la parábola en Q, P, O, &c. con lo qual tendremos por lo dicho antes

$ZV^2:HI^2::HK:IK::HK\times KL:IK\times KL::$ (por la propiedad de la parábola y por ser $IK=KL$) $NH^2:KL^2$, y por lo tanto $ZV:HI::NH:KL$.

Del mismo modo demostraríamos que $\begin{cases} YT:GH::OG:KL \\ XS:FG::FP:KL \end{cases}$

y por último que $ER:EF::EQ:KL$;

y multiplicando extremos y medios en estas proporciones se tendrá

$NH\times HI=KL\times ZV$, $OG\times GH=KL\times YT$, $PF\times FG=KL\times XS$,

y por último $EQ\times EF=KL\times ER$.

Entendido esto, vamos á probar que el *segmento parabólico* EQMI *es igual al rectángulo que se forme por la curva* EXA *rectificada y por la recta dada* KL.

Para demostrarlo, fórmese segun Arquimedes [499] un rectángulo por la recta dada KL y una linea BB (fig. 176 y 177) que sea igual con dicho segm. EQMI. Si probamos que la recta BB es igual á la curva EXA, constará nuestra proposicion; y así, digo que la recta BB es igual con la curva EXA. Sino es igual será mayor ó menor. Supongamos

1.° que la recta BB sea mayor que la curva EXA, y que sea el exceso, si le hay, la recta ΔΔ. Segun lo expuesto [502] podemos circunscribir á la curva EXA una figura compuesta de tangentes que exceda á la curva en un intervalo menor que la recta ΔΔ. Supongamos hecha esta circunscripcion, y en una figura separada que supondremos ser la 176, y se tendrá que esta figura compuesta de las ER,XS,YT,ZV será mayor que la curva EXA; ahora BB es mayor que la curva por el supuesto, y excediendo la figura circunscripta á la curva en un intervalo menor que el que BB lleva á la curva, se deduce que la figura circunscripta es menor que la recta BB. Y así, el rectángulo formado por KL y por el perímetro de la circunscripta es menor que el rectángulo formado por KL y por BB. Pero el rectángulo formado por KL y por BB es igual al segm. parabólico EQMI; luego el rectángulo formado por KL y por el perímetro de la circunscripta es menor que dicho segmento parabólico. Más acabamos de probar que el rectángulo formado por KL y por la porcion de tangente ER es igual al rectángulo de QE y EF; que el de KL y XS es igual al de PF y FG; que el rectángulo de KL é YT es igual al de OG y GH, y por último que el rectáng. de KL y ZV es igual al rectáng. de NH y HI; luego el rectángulo formado por KL y por todo el conjunto de tangentes de la figura circunscripta es igual á la suma de los rectángulos formados por QE,EF, por PF,FG, por OG,GH, y por NH, HI. Pero si á las rectas FP,GO,HN,IM que decrecen á proporcion que se acercan al vértice de la parábola continuamos, se tiran las perpendiculares QΓ, PΘ, OΛ, NΦ desde los puntos Q,P,O,N, tendremos que el rectángulo QEFΓ es igual al rectángulo formado por QE,EF, el ΘF= al de PF,FG, el ΛG al de OG,GH, y por último el ΦH igual con el formado por NH, HI. Luego el rectángulo formado por KL y por el conjunto de tangentes que componen la figura circunscripta es igual á los rectángulos ΓE,ΘF,ΛG,ΦH. Y como teníamos probado que el rectángulo formado por KL y por la figura circunscripta es menor que el segmento parabólico EQMI, resulta que la suma de los rectángulos ΓE, ΘF,ΛG,ΦH será menor que dicho segmento parabólico: lo que es absurdo, pues dichos rectángulos componen una figura circunscripta al segmento que es mayor que el mismo segmento. Y así, la recta BB no es mayor que la curva EXA.

Tampoco puede ser menor; porque si suponemos que la recta BB sea menor que la curva, y que el exceso sea ΔΔ, podremos circunscribirle una figura compuesta de porciones de tangentes menores que las partes correspondientes de la curva EXA (fig. 177), tal que el exceso de la curva sobre esta figura sea menor que el intervalo ΔΔ. Y si se supone que esta sea la compuesta de las tang.s XR, YS, ZT, AV, se tendrá que siendo la curva mayor que BB en el intervalo ΔΔ, y superando la misma curva á la circunscripta en un intervalo menor que ΔΔ, será la figura circunscripta mayor que BB; y por tanto el rectángulo formado por KL y por

el conjunto de tangentes de la circunscripta será mayor que el segmento parabólico EQMI. Pero el rectángulo formado por KL y dicho conjunto de tangentes es igual, por lo que hemos demostrado antes, á los rectángulos formados por PF,FE, por OG,GF, por NH,HG, y por MI,HI, pues $RX^2:EF^2::FK:IK=KL::FK\times KL:KL^2::FP^2:KL^2$,
de donde $RX:EF::FP:KL$ que da $XR\times KL=FE\times FP$,
y así de los demas. Y siendo el rectángulo formado por KL y por la figura circunscripta mayor que el segmento parabólico EQMI, resulta que la suma de los rectángulos formados por PF,FE, por OG,GF, por NH,GH, y por MI,HI, es mayor que dicho segmento parabólico; pero tiradas las PΓ,OΘ,NΛ,MΦ, perpendiculares á las EQ,FP,OG,&c. ó paralelas á la base, estos rectángulos serán iguales á los PE,OF,NG,MH. Luego la suma de todos aquestos rectángulos será mayor que el segmento parabólico, lo que es absurdo; pues dichos rectángulos forman una figura inscripta en dicho segmento, y por consiguiente menor que él. Luego la recta BB no es menor que la curva EXA. Y no siendo mayor ni menor será igual con dicha curva.

502 De lo demostrado ya se deduce que con la misma facilidad se puede demostrar que qualquier segmento parabólico EQPF tomado del primero, es igual al rectángulo formado por la recta dada KL y la curva EX. Y por tanto si en la base se da un punto qualquiera tal como F, siendo conocido el valor del segmento parabólico EQPF en figuras rectilineas por lo demostrado por Arquimedes, se tendrá tambien el rectángulo formado por KL y por la porcion EX de curva; y como es conocida la recta KL se deduce que tambien lo será la curva EX. Luego dado un punto qualquiera en la base tal como F, se puede hallar la porcion de curva que le corresponde, y queda demostrado que se puede hallar una recta igual con esta curva.

Hemos supuesto la construccion de la parábola vulgar para manifestar la posibilidad y certeza de nuestra proposicion; y con el fin de que no se crea que para hallar una recta igual con la curva EXA, es necesario construir la parábola simple, en cuyo caso el problema seria sólido, trata Fermat de hallar una recta que le sea igual, usando solo de lineas rectas y de circunferencias de círculos, lo que le parece se consigue del modo siguiente.

Supongamos para esto la curva parabólica DAC (fig. 178) que tenga por equacion $z^3=ax^2$, y que sea conocida la altura ó abscisa AB, y la ordenada ó semibase DB; digo que se puede obtener una recta igual con la curva DAC por un cálculo puramente geométrico. Porque sea OA el parámetro, quítese de él la novena parte EO, y hágase la YK igual con la otra parte AE; á continuacion de KY póngase la KX igual á la ordenada ó semibase DB. Sobre YX como diámetro descríbase el semicírculo YTX, y dividida la recta YK en R en dos partes iguales levántese la RT perpendicular que corte al semicírculo en T. Tómese RV

igual á la recta RT, y sobre VX como diámetro descríbase el semicírculo VQX, y levántese en R la perpendicular RQ hasta que encuentre en Q á dicha circunferencia. Sobre las rectas RQ,TR descríbanse las semicircunferencias RGQ,TPR, y colóquense en ellas las rectas RG,TP, que cada una sea igual con RY; y tiradas las rectas QG,RP, digo que la relacion que tiene la curva parábolica DAC con la base DBC es la misma que la del duplo del quadrado de la recta QG al triplo del quadrado de la recta RP, y por tanto es dada. Y así, si se hace $3RP^2 : 2GQ^2 :: DC : IH$, la recta IH que resulte de esta construccion será igual á la curva parabólica DAC.

Despues pasa el autor á dar á conocer otro infinito número de parábolas que construye por medio de esta, que todas son geométricas y rectificables; en lo que no nos detendremos, porque lo dicho basta para nuestro objeto.

Del Cálculo de las Diferencias.

503 Hasta aqui no hemos considerado en las funciones sino su desarrollo, y hemos investigado sus límites; ahora nos vamos á ocupar de sus incrementos ó decrementos. Sabemos por la idea que tenemos de funcion que si la variable se altera, se alterará la funcion; y por lo mismo tratamos de determinar quál es el incremento ó decremento que sobreviene á la funcion, dado el que sobreviene á su variable.

Si una cantidad variable tal como x aumenta ó disminuye y se llega á convertir en $x \pm k$, la cantidad indeterminada k que es la que ha causado su aumento ó su disminucion, se llama el *incremento*, la *diferencia finita*, ó simplemente la *diferencia* de dicha variable. Del mismo modo si variando z llega á ser $z \pm h$, la cantidad indeterminada h se llama la diferencia de z, cuyas diferencias serán positivas ó negativas segun x y z hayan aumentado ó disminuido. Pero como muchas veces se ofrece considerar en una misma qüestion las diferencias de muchas variables y sus funciones, á fin de expresarlas con mas sencillez, y guardar uniformidad, se hace uso de un signo general Δ que es la *delta* griega, anteponiéndole á la variable, cuya diferencia se quiere expresar; así, en lugar de $\pm k$ se suele escribir $\pm \Delta x$; y $\pm \Delta z$ en lugar de $\pm h$; cuyo signo tiene ademas la ventaja de manifestar inmediatamente el orígen x, ó z de dichas diferencias.

Las varias potencias $(\Delta x)^2, (\Delta x)^3, (\Delta x)^4$ &c de la diferencia de una cantidad variable x, se expresan mas sencillamente por $\Delta x^2, \Delta x^3, \Delta x^4$, &c.; y paraque estas diferencias no se tomen por las diferencias respectivas de x^2, x^3, x^4, &c. se denotan estas por $\Delta .x^2, \Delta .x^3, \Delta .x^4$, &c.

Entendido esto, pasemos á resolver este problema.

Dada la diferencia de una variable, encontrar la de la funcion.

Res. y Dem. Substitúyase en la funcion en vez de la variable la variable mas ó menos su diferencia, y de esto réstese la funcion primitiva,

y se tendrá la diferencia de dicha funcion. En efecto, sea $z=f.(x)$, si suponemos que x se convierte en $x\pm\Delta x$, z variará y se convertirá en z'; luego se tendrá $z'=f.(x\pm\Delta x)$;
luego si de esta equacion restamos la primera, hallaremos el incremento de dicha funcion, y será $z'-z=f.(x\pm\Delta x)-f.(x)$;
pero como z al variar x ha padecido por precision un incremento ó decremento, resulta que z' será igual á $z+\Delta z$, luego el primer miembro se convertirá en $z'-z=z+\Delta z-z=\Delta z$;
por lo qual tendremos $\Delta z=f.(x\pm\Delta x)-f.(x)$.

No damos aqui á Δz el signo de ambigüedad, por no exponer á equivocaciones creyendo que si se tomaba el signo $+$ de $\pm\Delta x$ se habia de tomar el $+$ de $\pm\Delta z$; y así, aunque Δz en unos casos será positiva y en otros negativa, quedará esto determinado por el signo que resulte para el segundo miembro.

Ahora, solo falta determinar la forma que tiene $f.(x)$ y desenvolverla despues de haber substituido $x\pm\Delta x$ en vez de x, y del todo restar la funcion primitiva; por lo que aplicaremos esta resolucion á las funciones mas interesantes tanto algebráicas como trascendentes; pero antes manifestaremos que si una constante afecta á una funcion por via de multiplicacion ó division, esta constante afectará del mismo modo á su diferencia; porque si se tiene $z=\frac{a}{b}f.(x)$ será $z'=\frac{a}{b}f.(x\pm\Delta x)$,

y $\Delta z=z'-z=\frac{a}{b}f.(x\pm\Delta x)-\frac{a}{b}f.(x)=\frac{a}{b}[f.(x\pm\Delta x)-f.(x)]=\frac{a}{b}\Delta f.(x)$.

Si la constante afectase á la funcion por via de suma ó de resta, desaparecerá de la diferencia; porque si fuese $z=f.(x)\pm a$, como las cantidades constantes no aumentan ni disminuyen en un mismo cálculo se tendrá $z'=f.(x\pm\Delta x)\pm a$,
de donde $\Delta z=z'-z=f.(x\pm\Delta x)\pm a-f.(x)\mp a=f.(x\pm\Delta x)-f.(x)$ porque $\pm a$ y $\mp a$ quedan destruidas.

Quando se tienen muchas funciones enlazadas por via de suma ó resta, la diferencia total es igual al conjunto de las diferencias de cada funcion componente. Porque si tenemos $z=f.(x)+F.(x)-\varphi.(x)$,
sera $z'=f.(x\pm\Delta x)+F.(x\pm\Delta x)-\varphi.(x\pm\Delta x)$,
y $z'-z=\Delta z=f.(x\pm\Delta x)+F.(x\pm\Delta x)-\varphi.(x\pm\Delta x)-f.(x)-F.(x)+\varphi.(x)$;
pero $f.(x\pm\Delta x)-f.(x)=\Delta f.(x)$, $F.(x\pm\Delta x)-F.(x)=\Delta F.(x)$,
y $-\varphi.(x\pm\Delta x)+\varphi.(x)=-[\varphi.(x\pm\Delta x)-\varphi.(x)]=-\Delta\varphi.(x)$;
luego se tendrá $\Delta z=\Delta f.(x)+\Delta F.(x)-\Delta\varphi.(x)$.

Sea $z=f.(x)=x$, y será $z'=x\pm\Delta x$,
por lo que $\Delta z=z'-z=x\pm\Delta x-x=\pm\Delta x$.

Supongamos que la funcion propuesta z tenga esta forma x^2+ax+b, y se tendrá $z=f.x=x^2+ax+b$,
por lo que $z'=f.(x\pm\Delta x)=(x\pm\Delta x)^2+a(x\pm\Delta x)+b=x^2\pm 2x\Delta x+\ldots$
$\Delta x^2+ax\pm a\Delta x+b$;
luego $\Delta z=z'-z=x^2\pm 2x\Delta x+\Delta x^2+ax\pm a\Delta x+b-x^2-ax-b=\ldots$
$\pm 2x\Delta x+\Delta x^2\pm a\Delta x=\pm(a+2x)\Delta x+\Delta x^2$.
Sea ahora $z=f.(x)=ax^n$,
y tendremos $z'=a(x\pm\Delta x)^n=a(x^n\pm nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2\pm\ldots$
$n\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}x^{n-3}\Delta x^3+\&c.)$,
de donde resulta $\Delta z=z'-z=a(x^n\pm nx^{n-1}\Delta x+n\times\frac{n-1}{2}x^{n-2}\Delta x^2\pm\ldots$
$n\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}x^{n-3}\Delta x^3+\&.)-ax^n=a(\pm nx^{n-1}\Delta x+n.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\Delta x^2$
$\pm n\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}x^{n-3}\Delta x^3+\&c.)$.

De aqui se deduce que la diferencia de una potencia de una variable es igual á todos los términos de la potencia de la misma variable junto con su diferencia, excepto el primero ó aquel que es independiente de la diferencia; pues lo que hay dentro del paréntesis son todos los términos de la potencia n de $x\pm\Delta x$ excepto el primero. Y así, para hallar la diferencia de la expresion $z=x^4$, pondremos todos los términos de la potencia quarta de $x\pm\Delta x$ excepto el primero, y se tendrá desde luego

$$\Delta z=\pm 4x^3\Delta x+6x^2\Delta x^2\pm 4x\Delta x^3+\Delta x^4.$$

Si hubiera sido $z=ax^4$ hubiéramos tenido

$$\Delta z=a(\pm 4x^3\Delta x+6x^2\Delta x^2\pm 4x\Delta x^3+\Delta x^4).$$

Esta regla es muy útil en la práctica, porque si se tubiese la expresion

$$z=ax^5+b^2x^3+cx+m^2,$$

hallaríamos desde luego $\Delta z=a(\pm 5x^4\Delta x+10x^3\Delta x^2\pm 10x^2\Delta x^3+\ldots$
$5x\Delta x^4\pm\Delta x^5)+b^2(\pm 3x^2\Delta x+3x\Delta x^2\pm\Delta x^3)\pm c\Delta x$.

Y si quisiéramos hallar el incremento que sobrevenia á la funcion quando la variable se convertia en $x+3$, supondríamos que $\Delta x=3$ y seria $\Delta z=a(15x^4+90x^3+270x^2+405x+243)+b^2(9x^2+27x+27)+3c$.

Supongamos que $z=f.x=\frac{ax}{b+x}$; con lo qual será

$$z'=a\frac{x\pm\Delta x}{b+x\pm\Delta x}=(^*)a\left(\frac{x}{b+x}\pm\frac{b\Delta x}{(b+x)^2}-\frac{b\Delta x^2}{(b+x)^3}\pm\frac{b\Delta x^3}{(b+x)^4}+\&c.\right),$$

lo que da $z'-z=\Delta z=a\left(\pm\frac{b\Delta x}{(b+x)^2}-\frac{b\Delta x^2}{(b+x)^3}\pm\frac{b\Delta x^3}{(b+x)^4}+\&c.\right)$.

Pasemos ya á las funciones trascendentes, y supongamos que sea z el logaritmo neperiano de x, y tendremos

$$z'=\log.(x\pm\Delta x)=\log.x\left(1\pm\frac{\Delta x}{x}\right)=\log.x+\log.\left(1\pm\frac{\Delta x}{x}\right),$$

y por consiguiente

$$z'-z=\Delta z=\log.\left(1\pm\frac{\Delta x}{x}\right)=[\S 472]\pm\frac{\Delta x}{x}-\frac{\Delta x^2}{2x^2}\pm\frac{\Delta x^3}{3x^3}-\&c.$$

En el sistema de los logaritmos de Neper el módulo es igual con 1; pero si se pidiese la diferencia relativa á otro sistema qualquiera, cuyo módulo $=M$, seria $\Delta z=M\left(\pm\frac{\Delta x}{x}-\frac{\Delta x^2}{2x^2}\pm\frac{\Delta x^3}{3x^3}-\&c.\right)$.

(*) *Esto resulta de desenvolver en una serie ordenada por las potencias de Δx la expresion $\frac{x\pm\Delta x}{b+x\pm\Delta x}$ por el método expuesto en la teoría de las series.*

En efecto, haríamos $\frac{x\pm\Delta x}{b+x\pm\Delta x}=A+B\Delta x+C\Delta x^2+D\Delta x^3+\&c.$

de donde quitando el divisor resulta

$$x\pm\Delta x=(b+x)A+(b+x)B\Delta x+(b+x)C\Delta x^2+(b+x)D\Delta x^3+\&c.$$
$$\pm A\Delta x \qquad \pm B\Delta x^2 \qquad \pm C\Delta x^3 \qquad \pm\&c.$$

é igualando los coeficientes de los términos homólogos se tendrá

$(b+x)A=x$, *ó* $A=\frac{x}{b+x}$; $(b+x)B\pm A=\pm 1$; *ó* $(b+x)B=\ldots$

$\pm 1\mp\frac{x}{b+x}=\frac{\pm b\pm x\mp x}{b+x}=\pm\frac{b}{b+x}$, *y* $B=\pm\frac{b}{(b+x)^2}$;

$(b+x)C\pm B=0$, *ó* $(b+x)C=\mp B=\mp\left(\pm\frac{b}{(b+x)^2}\right)$ *ó* $C=-\frac{b}{(b+x)^3}$;

$(b+x)D\pm C=0$, *ó* $D=\mp\frac{C}{b+x}=\mp\frac{-\frac{b}{(b+x)^3}}{b+x}=\pm\frac{b}{(b+x)^4}$;

luego $\frac{x\pm\Delta x}{b+x\pm\Delta x}=\frac{x}{b+x}\pm\frac{b}{(b+x)^2}\Delta x-\frac{b}{(b+x)^3}\Delta x^2\pm\frac{b}{(b+x)^4}\Delta x^3\&c.$

Si fuese $z=a^x$, resultaria $z'=a^{x\pm\Delta x}=a^x a^{\pm\Delta x}$;

pero [§473] $a^{\pm\Delta x}=1\pm\Delta x \log. a+\frac{\Delta x^2}{2}(\log. a)^2\pm\frac{\Delta x^3}{2\times3}(\log. a)^3+\&c.$

luego $z'=a^x\left(1\pm\Delta x \log. a+\frac{\Delta x^2}{2}(\log. a)^2\pm\frac{\Delta x^3}{2\times3}(\log. a)^3+\&c.\right)$

y $\Delta z=a^x\left(\pm\Delta x \log. a+\frac{\Delta x^2}{2}(\log. a)^2\pm\frac{\Delta x^3}{2\times3}(\log. a)^3+\&c.\right)$.

Sea $z=\text{sen}.x$ y será $z'=\text{sen}.(x\pm\Delta x)=\text{sen}.x \cos.\Delta x\pm\cos.x\ \text{sen}.\Delta x$; pero suponiendo el radio igual con 1 es

[§475 y 474] $\cos\Delta x=1-\frac{\Delta x^2}{2}+\frac{\Delta x^4}{2\times3\times4}-\&c.$

$\text{sen}.\ \Delta x=\Delta x-\frac{\Delta x^3}{2\times3}+\frac{\Delta x^5}{2\times3\times4\times5}-\&c.$

luego $z'=\text{sen}.x\pm\Delta x \cos.x-\frac{\Delta x^2}{2}\text{sen}.x\mp\frac{\Delta x^3}{2\times3}\cos.x+\&c.$;

y $\Delta z=\pm\Delta x \cos.x-\frac{\Delta x^2}{2}\text{sen}.\ x\mp\frac{\Delta x^3}{2\times3}\cos.\ x+\&c.$

Se fuese $z=\cos.x$ tendríamos

$z'=\cos.(x\pm\Delta x)=\cos.x \cos.\Delta x\mp\text{sen}.x\ \text{sen}.\ \Delta x=$

$\cos.\ x\mp\Delta x\ \text{sen}.\ x-\frac{\Delta x^2}{2}\cos.x\pm\frac{\Delta x^3}{2\times3}\text{sen}\ x+\&c.$

de donde inferiríamos $\Delta z=\mp\Delta x\ \text{sen}.\ x-\frac{\Delta x^2}{2}\cos.\ x\pm\frac{\Delta x^3}{2\times3}\text{sen}.x+\&c.$

De todos los exemplos que hemos resuelto podemos deducir que si z es una funcion qualquiera $f.(x)$ de una variable x, y substituimos en ella $x\pm\Delta x$ en lugar de x podremos suponer

$f.(x\pm\Delta x)=z'=z+A\Delta x+B\Delta x^2+C\Delta x^3+D\Delta x^4+\&c.$

y por consiguiente $\Delta z=z'-z=A\Delta x+B\Delta x^2+C\Delta x^3+D\Delta x^4+\&c.$ representando A, B, C, D, &c. funciones indeterminadas de x.

Esta proposicion tambien la podemos demostrar *á priori*, como lo haremos en lo sucesivo.

504 Pasemos ya á las funciones de dos variables independientes, y supongamos que se tenga $z=f.(x,u)$, y tendremos que en este supuesto z puede variar por tres causas; 1.ª por la variacion sola de x quando se transforma en $x\pm\Delta x$; 2.ª porque u sola sea la que varie, y se convierta por exemplo en $u\pm\Delta u$; y 3.ª variando ambas x y u. En el primero y segundo caso las diferencias que resultan de z se llaman *parciales*, y se expresan respectivamente por $\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x$, $\frac{\Delta z}{\Delta u}\Delta u$; en el tercer caso resul-

tará la diferencia Δz que se llama *diferencia total*, ó simplemente la *diferencia* de la funcion.

Como en los dos primeros casos solamente varía en la funcion z una de las cantidades x ó u, su diferencia se hallará en virtud del problema antecedente; y por lo que toca al tercero, si llamamos z' á la funcion $f.(x \pm \Delta x, u \pm \Delta u)$ que resulta substituyendo en z, $x \pm \Delta x$ por x, y $u \pm \Delta u$ por u, la diferencia de z ó Δz será igual á

$$z' - z = f.(x \pm \Delta x, u \pm \Delta u) - f.(x,u).$$

Del mismo modo tendríamos que si fuese $z = f.(x,u,r,t)$ resultaria

$$\Delta z = f.(x \pm \Delta x, u \pm \Delta u, r \pm \Delta r, t \pm \Delta t) - f.(x,u,r,t).$$

En la resolucion de los exemplos siguientes supondremos para mayor sencillez y claridad, que las variables x,u aumentan á un mismo tiempo; pues en caso de que alguna disminuya, bastará hacer preceder á su diferencia el signo —.

1.º Sea $z = ax + bu + cxu$ y tendremos $z' = a(x+\Delta x) + b(u+\Delta u) + \ldots$
$c(x+\Delta x)(u+\Delta u) = ax + a\Delta x + bu + b\Delta u + cxu + cx\Delta u + cu\Delta x + c\Delta x\Delta u$;
y restando de esto el valor de z, y resolviendo en factores los términos donde se halla una misma diferencia, será

$$\Delta z = z' - z = (a+cu)\Delta x + (b+cx)\Delta u + c\Delta x\Delta u.$$

2.º Sea $z = a(u-b)^2 - x(x-a)^2$

y se tendrá $z' = a(u+\Delta u-b)^2 - (x+\Delta x)(x+\Delta x-a)^2$,
que tomando por primera parte en el primer término $u-b$, y Δu por segunda, y en el segundo por primera $x-a$, y por segunda Δx, se convertirá en $z' = a(u-b)^2 + 2a(u-b)\Delta u + a\Delta u^2 - x(x-a)^2 - 2x(x-a)\Delta x - \ldots$
$x\Delta x^2 - (x-a)^2\Delta x - 2(x-a)\Delta x^2 - \Delta x^3$,
y restando de esto la funcion primitiva, destruyendo los términos y executando las operaciones correspondientes en los demas, se tendrá

$$\Delta z = z' - z = 2au\Delta u - 2ab\Delta u + a\Delta u^2 - 2x^2\Delta x + \ldots$$
$$2ax\Delta x - x\Delta x^2 - x^2\Delta x + 2ax\Delta x - a^2\Delta x - 2x\Delta x^2 + 2a\Delta x^2 - \Delta x^3,$$

ó resolviendo en factores los términos donde hay una misma diferencia, y ordenando por las potencias de la diferencia de x, será por último
$\Delta z = -(3x^2 - 4ax + a^2)\Delta x + 2a(u-b)\Delta u + (2a-3x)\Delta x^2 + a\Delta u^2 - \Delta x^3$.

3.º Si fuese $z = x^4 - aux^2 + bu^3$ seria
$z' = (x+\Delta x)^4 - a(u+\Delta u)(x+\Delta x)^2 + b(u+\Delta u)^3 = x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 +$
$4x\Delta x^3 + \Delta x^4 - aux^2 - 2aux\Delta x - au\Delta x^2 - ax^2\Delta u - 2ax\Delta u\Delta x - \ldots$
$a\Delta u\Delta x^2 + bu^3 + 3bu^2\Delta u + 3bu\Delta u^2 + b\Delta u^3$;
que restando ahora el valor de z y descomponiendo en factores los términos semejantes de las diferencias resulta

$$\Delta z = z' - z = (4x^3 - 2aux)\Delta x + (3bu^2 - ax^2)\Delta u + \ldots$$
$$(6x^2 - au)\Delta x^2 - 2ax\Delta x\Delta u + 3bu\Delta u^2 - a\Delta x^2\Delta u + b\Delta u^3 + \Delta x^4.$$

De estos exemplos podemos inferir que siendo z una funcion qualquiera $f.(x,u)$ de dos variables independientes x y u, y $A.B.C.$&c. funciones indeterminadas de las mismas variables, se puede suponer

$z' = f.(x+\Delta x, u+\Delta u) = z + A\Delta x + B\Delta u + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta u + E\Delta u^2 +$ &c.
y $\Delta z = A\Delta x + B\Delta u + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta u + E\Delta u^2 +$ &c. (A)
lo que tambien podríamos demostrar *á priori.*

Del mismo modo deduciríamos que siendo $z = f.(x,u,r)$ se tendria

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta u + C\Delta r + D\Delta x^2 + E\Delta x\Delta u + F\Delta x\Delta r + \ldots$$
$$G\Delta u^2 + H\Delta u\Delta r + I\Delta r^2 + \&c.$$

Si en la equacion (A) hacemos $\Delta u = 0$, resultará la diferencia de z relativa á la variacion de x; y será $\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x = A\Delta x + C\Delta x^2 + F\Delta x^3 +$ &c.

y si en dicha expresion se supone $\Delta x = 0$, resultará $\frac{\Delta z}{\Delta u}\Delta u = B\Delta u + E\Delta u^2 +$ &c.

505 Si entre las cantidades variables hubiese una relacion expresada por la equacion $V = f.(x,z) = 0$; x seria funcion de z, y recíprocamente z funcion de x; de donde se sigue que si x por exemplo varía y se transforma en $x+\Delta x$, z variará necesariamente; de manera que llamando Δz al incremento ó diferencia que resulta en z, los nuevos valores $x+\Delta x$, $z+\Delta z$ de x y de z, deberán necesariamente satisfacer á la equacion

$V = f.(x,z) = 0$ y tendremos $V' = f.(x+\Delta x, z+\Delta z) = 0$,
ó $V + A\Delta x + B\Delta z + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta z + E\Delta z^2 + F\Delta x^3 +$ &c. $= 0$;
y como por el supuesto es $V = 0$, será tambien
$A\Delta x + B\Delta z + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta z + E\Delta z^2 + F\Delta x^3 +$ &c. $= 0\,(\alpha)$ ó $\Delta V = 0$;
cuya equacion expresará la relacion entre Δx y Δz, de donde inferiremos que esta relacion se hallará tomando la diferencia de V como si las variables x y z fuesen independientes, y haciendo luego $\Delta V = 0$.

Si por exemplo la relacion entre x y z fuese dada por la expresion $a(z-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$, la equacion

$$-(3x^2-4ax+a^2)\Delta x + 2a(z-b)\Delta z + (2a-3x)\Delta x^2 + a\Delta z^2 - \Delta x^3 = 0\ (\alpha')$$

expresaria la razon ó relacion entre Δx y Δz, de modo que seria

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{3x^2-4ax+a^2+(3x-2a)\Delta x - a\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta z + \Delta x^2}{2a(z-b)}\ (6).$$

Y si la relacion entre las mismas variables fuese dada por la equacion $x^4 - azx^2 + bz^3 = 0$, la relacion entre sus diferencias estaria expresada por

$$2x(2x^2-az)\Delta x + (3bz^2-ax^2)\Delta z + (6x^2-az)\Delta x^2 - 2ax\Delta x\Delta z + \ldots$$
$$3bz\Delta z^2 + 4x\Delta x^3 - a\Delta x^2\Delta z + b\Delta z^3 + \Delta x^4 = 0\ (\gamma)$$

de cuya equacion se saca

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{2x(az-2x^2) - (6x^2-az)\Delta x + 2ax\Delta z - 3bz\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta z - 4x\Delta x^2 + a\Delta x\Delta z - b\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta z^2 - \Delta x^3}{3bz^2-ax^2}\ (\delta)$$

En general, dada la relacion entre x y z por una equacion qualquiera, y siendo A, B, C, D, &c. funciones indeterminadas de x y de z, la relacion entre las diferencias $\Delta z, \Delta x$, se podrá cifrar en la equacion
$A\Delta x+B\Delta z+C\Delta x^2+D\Delta x\Delta z+E\Delta z^2+F\Delta x^3+G\Delta x^2\Delta z+\&c.=0$,
y la razon será

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=-\frac{A+C\Delta x+D\Delta z+E\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta z+F\Delta x^2+G\Delta x\Delta z+\&c.}{B} \quad (\beta').$$

506 En estos tres exemplos hemos deducido la razon $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ entre las diferencias de x y de z, de la equacion que expresa la relacion entre estas diferencias, prescindiendo de los valores particulares que se pueden dar á x ó á z. Quando se ofrece determinar dicha razon, suponiendo que x ó z tienen ciertos valores determinados, suele suceder que la substitucion de estos valores hace infinita la razon $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, la qual sin embargo debe ser finita y determinada.

Supongamos por exemplo que siendo dada la relacion entre x y z por la equacion $a(z-b)^2-x(x-a)^2=0$, se pida la razon $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ entre sus diferencias, en el supuesto de ser $x=a$.

La equacion $a(z-b)^2-x(x-a)^2=0$ manifiesta que quando $x=a$, z es igual con b; por consiguiente substituyendo estos valores en la equacion (β), la reducirán á $\frac{\Delta z}{\Delta x}=\infty$; pero como por el supuesto de ser $x=a$ y $z=b$, el coeficiente de Δx y el de Δz en la equacion (α') son cero, esta equacion se reduce á $a\Delta z^2-a\Delta x^2-\Delta x^3=0$, y la razon $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ será dada por la equacion de segundo grado $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2=1+\frac{\Delta x}{a}$. Por lo qual no se debe extrañar que en el supuesto de $x=a$, la equacion (β) nos dé un valor falso de $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, puesto que en dicha equacion el consequente de la razon $\Delta x:\Delta z$ es la cantidad $2a(z-b)$ que por ser $z=b$, se reduce á cero ó no debe existir.

Si dada la equacion $x^4-azx^2+bz^3=0$ entre x y z, y la equacion (γ) entre sus diferencias, se pidiese la razon $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, suponiendo $x=0$; como en

este caso seria tambien $z=0$, la equacion (γ) se reduciria á
$b\Delta z^3-a\Delta z\Delta x^2+\Delta x^4=0$ ó á $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^3-\frac{a}{b}\times\frac{\Delta z}{\Delta x}=-\frac{\Delta x}{b}$,

que es de tercer grado, y cuya resolucion dará los valores de $\frac{\Delta z}{\Delta x}$. La equacion ($\delta$) nos hubiera dado $\frac{\Delta z}{\Delta x}=\infty$ por la misma razon que en el exemplo precedente.

El mismo método se seguiria en las funciones de mas variables; y así, no nos detendremos mas sobre este punto, y pasaremos á considerar las diferencias de un órden superior.

507 Con la mira de dar á conocer como se originan estas diferencias supondremos que haciendo variar sucesivamente una funcion de una ó mas variables, que llamaremos z, sean z', z'', z''', z^{IV}, &c. los valores consecutivos de z quando aumenta. y $'z$, $''z$, $'''z$, ^{IV}z.& quando disminuye; de manera que &c., $^{IV}z, '''z, ''z, 'z, z, z', z'', z''', z^{IV}$, &c. forme una serie de términos sucesivos.

En virtud de esta consideracion y de lo expuesto [503] tendremos
$z'-z=\Delta z$; $z''-z'=\Delta z'$; $z'''-z''=\Delta z''$; $z^{IV}-z'''=\Delta z'''$ &c. $z-'z=\Delta 'z$;
$'z-''z=\Delta ''z$; $''z-'''z=\Delta '''z$; $'''z-{}^{IV}z=\Delta {}^{IV}z$, &c.

Sabemos igualmente [503] que $\Delta z'-\Delta z=\Delta(z'-z)$,
luego será $\Delta z'-\Delta z=\Delta\Delta z$.

La diferencia de la diferencia de una funcion z de una ó muchos variables se llama la *diferencia segunda* de z, y se representa mas sencillamente por $\Delta^2 z$, y no se debe confundir esta expresion con ninguna de estas $\Delta.z^2.\Delta z^2$; pues $\Delta.z^2$ indica la diferencia del quadrado de z: Δz^2 el quadrado de la diferencia de z, esto es, $(\Delta z)^2$; $\Delta^2 z$ indica, como acabamos de decir, la diferencia de la diferencia de z ó la diferencia segunda de z.

Del mismo modo tendremos
$\Delta z'-\Delta z=\Delta^2 z$ ó $\Delta z'=\Delta z+\Delta^2 z$. $\Delta z''-\Delta z'=\Delta^2 z'$ ó $\Delta z''=\Delta z'+\Delta^2 z'$,
$\Delta z'''-\Delta z''=\Delta^2 z''$ ó $\Delta z'''=\Delta z''+\Delta^2 z''$, $\Delta z^{IV}-\Delta z'''=\Delta^2 z'''$
ó $\Delta z^{IV}=\Delta z'''+\Delta^2 z'''$, &c.; $\Delta z-\Delta 'z=\Delta^2 'z$ ó $\Delta z=\Delta 'z+\Delta^2 'z$,
$\Delta 'z-\Delta ''z=\Delta^2 ''z$ ó $\Delta 'z=\Delta ''z+\Delta^2 ''z$, $\Delta ''z-\Delta '''z=\Delta^2 '''z$
ó $\Delta ''z=\Delta '''z+\Delta^2 '''z$, &c.

La diferencia segunda de la diferencia de z se llama la *diferencia tercera* de z, y se denota por $\Delta^3 z$; y siguiendo el mismo órden, la diferencia quarta se denota por $\Delta^4 z$; la diferencia quinta por $\Delta^5 z$, y en general la diferencia n por $\Delta^n z$.

Si z fuese funcion de una sola variable x, hallaríamos z' substitu-

yendo en lugar de $x, x'=x+\Delta x; \Delta z'$, substituyendo en $\Delta z, x'=x+\Delta x$ en vez de x; y $\Delta x'=\Delta.(x+\Delta x)=\Delta x+\Delta^2 x$ en lugar de Δx; $\Delta^2 z'$ substituyendo en $\Delta^2 z$ por $x, x'=x+\Delta x$; por $\Delta x, \Delta x'=\Delta x+\Delta^2 x$, y por $\Delta^2 x, \Delta^2 x'=\Delta^2(x+\Delta x)=\Delta^2 x+\Delta^3 x$, &c.

Si en una funcion z de dos variables independientes x y u, substituimos en lugar de $x, x'=x+\Delta x$, y en vez de $u, u'=u+\Delta u$, resultará z'; substituyendo en $\Delta z, x'=x+\Delta x$ por $x, u'=u+\Delta u$ por $u, \Delta x'=\Delta x+\Delta^2 x$ por Δx, y $\Delta u'=\Delta u+\Delta^2 u$ por Δu, resultará $\Delta z'$;
si substituimos en $\Delta^2 z. x'=x+\Delta x$ en vez de $x, u'=u+\Delta u$ en vez de u, $\Delta x'=\Delta x+\Delta^2 x$ en lugar de $\Delta x, \Delta u'=\Delta u+\Delta^2 u$ en lugar de Δu, $\Delta^2 x'=\Delta^2 x+\Delta^3 x$ en lugar de $\Delta^2 x$, y $\Delta^2 u'=\Delta^2 u+\Delta^3 u$ en vez de $\Delta^2 u$; resultará $\Delta^2 z'$, y así en adelante.

Con la mira de simplificar los cálculos, se suele suponer que una de las cantidades variables varía uniformemente: ó lo que es lo mismo que su diferencia primera es constante, y esta sirve de término de comparacion, al qual se refieren las diferencias de las demas cantidades.

Nosotros supondremos Δx constante en los siguientes cálculos, y nos propondremos *hallar las diferencias* segunda, tercera, &c. *de una funcion qualquiera de x.*

Una vez que suponemos Δx constante, si llamamos z á la funcion propuesta, y substituimos en su diferencia $\Delta z. x+\Delta x$ en lugar de x, resultará $\Delta z'$, de la qual restando Δz, se tendrá $\Delta^2 z$. Substituyendo en $\Delta^2 z$ por $x, x+\Delta x$, tendremos $\Delta^2 z'$;
y restando $\Delta^2 z$ resultará $\Delta^3 z$, y así en adelante.

Sea por exemplo $z=ax^n$, y tendremos

$$\Delta z=a(nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times 3}x^{n-3}\Delta x^3+\ldots$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times 3\times 4}x^{n-4}\Delta x^4+\ldots$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\times 3\times 4\times 5}x^{n-5}\Delta x^5+\ldots\ldots$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2\times 3\times 4\times 5\times 6}x^{n-6}\Delta x^6+\&c.$$

y restando esta cantidad de la que resulta substituyendo en ella $x+\Delta x$ por x, y reduciendo tendremos

$$\Delta^2 z=a[n(n-1)x^{n-2}\Delta x^2+n(n-1)(n-2)x^{n-3}\Delta x^3+\ldots$$
$$\frac{7n(n-1)(n-2)(n-3)}{3\times 4}x^{n-4}\Delta x^4+\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{4}x^{n-5}\Delta x^5+\ldots$$
$$\frac{31n(n-1)\ldots(n-5)}{3\times 4\times 5\times 6}x^{n-6}\Delta x^6+\&c.];$$

haciendo la misma operacion con esta cantidad que con la antecedente, hallaremos

$$\Delta^3 z = an[(n-1)(n-2)x^{n-3}\Delta x^3 + \tfrac{3}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}\Delta x^4 + \ldots$$

$$\tfrac{5}{4}n(n-1)\ldots(n-4)x^{n-5}\Delta x^5 + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{2}x^{n-6}\Delta x^6 + \&c.],$$

y del mismo modo se hallarán las demas diferencias.

Supongamos ahora que z sea funcion de dos variables independientes que señalaremos con x y con u, y tendremos que si substituimos en Δz, $x+\Delta x$ en lugar de x, y $u+\Delta u$ en lugar de u; y $\Delta u+\Delta^2 u$ en lugar de Δu, resultará $\Delta z'$, de la qual restando Δz tendremos $\Delta^2 z$. Substituyendo en $\Delta^2 z$ por x, $x+\Delta x$; por u, $u+\Delta u$; por Δu, $\Delta u+\Delta^2 u$; y por $\Delta^2 u$, $\Delta^2 u+\Delta^3 u$, resultará $\Delta^2 z'$, de la qual si quitamos $\Delta^2 z$, la resta será $\Delta^3 z$; y así de las demas diferencias.

Sea por exemplo $z=u(a+x)$, y tendremos

$z'=(u+\Delta u)(a+x+\Delta x)=u(a+x+\Delta x)+(a+x+\Delta x)\Delta u$;

y $\Delta z=z'-z=u(a+x+\Delta x)+(a+x+\Delta x)\Delta u-u(a+x)=u\Delta x+\ldots$

$(a+x+\Delta x)\Delta u$; $\Delta z'=(u+\Delta u)\Delta x+(a+x+\Delta x+\Delta x)(\Delta u+\Delta^2 u)=\ldots\ldots$

$u\Delta x+(a+x+3\Delta x)\Delta u+(a+x+2\Delta x)\Delta^2 u$; y $\Delta^2 z=\Delta z'-\Delta z=u\Delta x+\ldots$

$(a+x+3\Delta x)\Delta u+(a+x+2\Delta x)\Delta^2 u-u\Delta x-(a+x+\Delta x)\Delta u=2\Delta x\Delta u+\ldots$

$(a+x+2\Delta x)\Delta^2 u$; $\Delta^2 z'=2\Delta x(\Delta u+\Delta^2 u)+(a+x+3\Delta x)(\Delta^2 u+\Delta^3 u)=\ldots$

$2\Delta x\Delta u+2\Delta x\Delta^2 u+(a+x+3\Delta x)\Delta^2 u+(a+x+3\Delta x)\Delta^3 u=2\Delta x\Delta u+\ldots\ldots$

$(a+x+5\Delta x)\Delta^2 u+(a+x+3\Delta x)\Delta^3 u$; y $\Delta^3 z=\Delta^2 z'-\Delta^2 z=2\Delta x\Delta u+\ldots\ldots$

$(a+x+5\Delta x)\Delta^2 u+(a+x+3\Delta x)\Delta^3 u-2\Delta x\Delta u-(a+x+2\Delta x)\Delta^2 u=\ldots\ldots$

$3\Delta x\Delta^2 u+(a+x+3\Delta x)\Delta^3 u$; &c.

Los problemas que hemos resuelto, aunque sencillos, manifiestan como se deben resolver otros mas complicados; y que toda la dificultad de estos se reducirá á que los cálculos serán mas largos.

508 Pues que $z'-z=\Delta z$, resulta que $z'=z+\Delta z$; y que $z''-z'=\Delta z'$, ó $z''=z'+\Delta z'=z+\Delta z+\Delta(z+\Delta z)=z+\Delta z+\Delta z+\Delta^2 z=z+2\Delta z+\Delta^2 z$; por lo que advertimos que el valor de un término qualquiera de la serie z, z', z'', z''', &c. se puede expresar en valores del primero y de sus diferencias; y si continuásemos sobre este punto, podríamos llegar á expresar el valor de z^n, entendiendo por n el número de acentos que deben afectar á z, y hallar la suma de tantos términos como se quieran en valores de z y de sus diferencias; tambien podríamos hallar el valor de $\Delta^n z$ en valores de los términos de la serie; pero como esto está completamente explicado en las instituciones de cálculo diferencial de D. José Chaix, lo omitiremos porque esta es una obra que no debe dexar de estudiar ninguno de nuestros jóvenes que intenten imponerse en el estado de las ciencias en el dia; por lo que terminaremos este asunto

advirtiendo que quando z sea funcion de x, se podrá suponer constante bien sea la Δx, bien sea la Δz; pero ambas no se pueden suponer constantes á un tiempo; pues esto solo se verificaria quando la funcion fuese igual con la misma variable.

DEL CALCULO DIFERENCIAL.

Principios de la diferenciacion de las funciones de una sola variable.

509 Hasta aqui solo hemos considerado en las funciones su desarrollo, su transformacion, sus límites, y sus incrementos ó decrementos; ahora nos dirigimos á encontrar el límite de la relacion de la diferencia ó incremento de la funcion con el de la variable, que formará el asunto de nuestras investigaciones.

En efecto, hemos visto que siendo $z = f.(x)$ resulta

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + D\Delta x^4 + \&c.;$$

luego si hallamos la relacion que tiene el incremento ó diferencia Δz de la funcion con el incremento ó diferencia Δx de la variable, tendremos

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = A + B\Delta x + C\Delta x^2 + D\Delta x^3 + \&c.,$$

donde se ve que la relacion de los incrementos de la funcion y de la variable se compone de dos partes, la una independiente de dichos incrementos que es A, y la otra que está afecta de Δx, ó que depende del incremento de la variable. Si se supone que la cantidad Δx vaya disminuyendo, el resultado se aproxîmará sin cesar á A, y no llegará á ser igual con A, sino quando $\Delta x = 0$, de modo que A es el límite de la relacion $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, es decir el valor hácia el qual se dirige sin cesar á medida que la cantidad Δx disminuye, y al que se puede aproxîmar tanto como se quiera.

Pero quando $\Delta x = 0$ resulta $\Delta z = z' - z = 0$,

luego la relacion $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ se convierte en $\frac{0}{0}$, y no se aniquila, puesto que es igual con A; donde vemos que desvaneciéndose los incrementos de la funcion y de la variable al mismo tiempo, conservan aun la relacion á que se han aproxîmado por grados.

Entre la funcion primitiva y el límite de esta relacion hay una dependencia que determina la una cantidad por medio de la otra; y todos los medios que la análisis indeterminada nos ofrece para conseguir este fin, estan comprendidos en el tratado que se conoce en general con el nombre de *Cálculo infinitesimal.*

Este precioso Cálculo tiene dos partes: la primera que se denomina *Cálculo diferencial trata de hallar, dada la funcion, el límite de la*

relacion de su incremento con el de la variable ó variables que entran en la funcion; *la segunda trata de determinar la funcion, quando se da conocido el límite de la relacion de su incremento con el de la variable*, y se llama *cálculo integral*; que es por consiguiente el inverso del cálculo diferencial, pues trata de hacer lo contrario que este.

Se dió á este portentoso cálculo el nombre de *cálculo infinitesimal*, porque su inventor Leibnitz deduxo su teoría por la consideracion de estos límites de las diferencias á que él llamaba *cantidades infinitamente pequeñas*; el de *cálculo diferencial*, porque se trataba de encontrar en su language la diferencia infinitamente pequeña de una funcion; y el de *cálculo integral*, porque suponia que la funcion se componia de una infinidad de diferenciales.

510 Hemos dicho que el inventor del cálculo infinitesimal fue Leibnitz, porque él fue el que primeramente publicó en 1684 una memoria sobre el cálculo diferencial en las actas de Lepsick; pero debemos advertir que ha habido muchas contextaciones sobre este punto, habiendo llegado hasta tratarle de plagiario, atribuyendo todo el mérito á Neuton. Más prescindiendo de las pasiones y amor propio de algunos hombres medianos, que excitan disensiones literarias mas bien con el objeto de distinguirse que con el de indagar la verdad, y exâminando la qüestion con imparcialidad, se halla que estos dos Geómetras le inventaron cada uno de por sí, y por un método muy diferente. Leibnitz publicó su método sin demostracion; y Neuton, aunque demostró sus principios, fue valiéndose de las ideas de *movimiento* que son extrañas en la análisis; por lo qual hubo tambien contextaciones sobre si era ó no exâcto dicho cálculo.

Mr. Rolle, individuo de la Academia de ciencias de Paris, publicó en 1703 entre las memorias de esta, una en que demuestra con la mayor evidencia que las cantidades que Leibnitz dice son infinitamente pequeñas, son cero, y aunque dicho Geómetra tenia mucha razon en esto, como no era entonces la opinion dominante de la Academia, puso esta en el tomo correspondiente á las de 1704 una advertencia en que decia: que *aunque la memoria de Rolle estaba impresa entre las de la Academia, no por eso esta habia adoptado nada de lo que en dicha memoria se podia hallar*; lo que no favorece demasiado á la Academia.

El método de Leibnitz era sencillo, y sus aplicaciones fáciles; pero carecia de claridad y exâctitud; el de Neuton era exâcto, pero largo, fastidioso y difícil de aplicar; por lo qual d'Alembert, con la notacion de Leibnitz y el método de las primeras y últimas razones de Neuton, demostró los principios de dicho cálculo, á cuyo método llamó *método de los límites*, con lo qual quedaba ya explicado el cálculo diferencial con claridad y exâctitud.

Este método supone que se sepa ya desenvolver en serie toda clase de funciones, lo que se executaba antes por métodos muy largos y peno-

sos; pero como en la memoria de D. José Chaix se presenta dicha transformacion con la mayor sencillez posible, se sigue que con su auxîlio se pueden demostrar los principios del cálculo diferencial con claridad, sencillez y exâctitud, que son las circunstancias que debe tener todo método para ser perfecto. Pero aun no haremos uso de este conocimiento, porque suministrando el cálculo diferencial unos métodos muy sencillos para desenvolver en serie, y hallar los incrementos de las funciones; vamos á presentar sus principios sin suponer mas conocimientos que los expuestos en el primer tomo (*), cuyo método estriba en el siguiente:

511 Teorema. *Si siendo* z=f.(x) *se substituye* x+k *en vez de* x, *señalando* k *una cantidad qualquiera positiva ó negativa, se convertirá* z *en* z', *y tendrá esta forma* $z'=f.x+Ak+Bk^2+Ck^3+Dk^4+$&c. *siendo* A,B,C,D,&c. *funciones qualesquiera de* x, *pero independientes de* k.

Este teorema quedará demostrado si manifestamos que la cantidad k solo se puede hallar con exponente entero y positivo; lo que se conseguirá demostrando que no puede ser el exponente en ningun término ni negativo ni fraccionario, y que ademas debe haber un término independiente de k que es la funcion primitiva. Para esto, observaremos ante todas cosas que si en el desarrollo de una funcion se substituye en vez de la variable de que depende un valor particular; debe resultar el mismo valor que daria la funcion antes de desenvolverse, pues de otro modo no seria la funcion igual con su desarrollo; y como haciendo $k=0, z'=f.(x+k)$ se convierte en $z=f.x$, se sigue que el desarrollo de $z'=f.(x+k)$, qualquiera que sea la forma que tenga, se debe reducir á $z=f.x$ quando $k=0$; por lo qual se hallará este término en la serie sin estar afecto de la cantidad k, el qual diremos que es el primer término del desarrollo. Ahora, la funcion $f.(x+k)$ no puede tener ningun término de la forma $\frac{M}{k^n}$, ó ser su exponente negativo; porque en este caso, quando k fuese igual con cero, este término seria infinito, y por consiguiente lo seria tambien $f.(x+k)$ en este supuesto; pero como en este caso se convierte en $f.x$, la qual no puede ser infinita, sino en ciertos valores particulares de x, no puede haber ningun término que tenga dicha forma.

Tampoco puede tener exponentes fraccionarios, ó lo que es lo mismo radicales, á menos que no se den á x valores particulares. Porque los radicales de k no podrían provenir sino de los radicales comprendidos en

---

(*) *Lagrange, célebre analista frances, expone el cálculo diferencial en sus Funciones analíticas de un modo que hace honor á su autor; pero como en la práctica tiene algunos inconvenientes, es regular que no se llegue á adoptar generalmente.*

$f.(x)$, y la substitucion de $x+k$ en vez de x, no podria aumentar ni disminuir el número de ellos, ni mudar su naturaleza mientras que x y k permanezcan indeterminadas. Por otra parte se sabe [I. 295] que todo radical tiene tantos valores diferentes, como unidades hay en su exponente, y que toda funcion irracional tiene por consiguiente tantos valores diferentes como combinaciones se pueden hacer con los diferentes valores de los radicales que encierra; luego si el desarrollo de la funcion $f.(x+k)$ pudiese contener un término de la forma $Mk^{\frac{m}{n}}=M\sqrt[n]{k^m}$ la funcion $f.x$ seria necesariamente irracional, y tendria por consiguiente un cierto número de valores diferentes, que seria el mismo para la funcion $f.(x+k)$ que para su desarrollo. Pero este desarrollo estando representado por la serie $f.x+Ak+Bk^2+Ck^3+\ldots+M\sqrt[n]{k^m}+$&c. cada valor de $f.(x)$ se combinaria con cada uno de los valores del radical $M\sqrt[n]{k^m}$, de manera que la funcion $f.(x+k)$ tendria mas valores diferentes que la misma funcion no desenvuelta; lo que es absurdo.

Esta demostracion es general y rigorosa, mientras que x y k permanecen indeterminadas, que es como aqui las consideramos; pero dexaria de serlo si á x se diesen valores determinados; porque seria posible que estos valores destruyesen algunos radicales en $f.x$ que podrian sin embargo permanecer en $f.(x+k)$.

512 Si de la equacion $z'=f.x+Ak+Bk^2+Ck^3+$&c.
se resta la equacion primitiva $z=f.x$
resultará $z'-z=Ak+Bk^2+Ck^3+Dk^4+Ek^5+Fk^6+$&c.
ó llamando h á $z'-z$ que es el incremento que sobrevino á la funcion z por el k que sobrevino á la variable x, se tendrá

$$h=Ak+Bk^2+Ck^3+Dk^4+Ek^5+\text{\&c.}$$

Para conocer que h es el incremento de la funcion y k el de la variable, substituiremos Δz en vez de h, y Δx en vez de k; con lo qual tendremos nuestra equacion convertida en

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta x^2+C\Delta x^3+D\Delta x^4+\text{\&c.}\ (\alpha),$$

que expresa el incremento ó diferencia de una funcion quando á la variable le sobreviene el incremento Δx; y vemos que este resultado es idéntico con el que se deduxo por la teoría de las diferencias.

Dividiendo esta equacion por Δx se tendrá la relacion de los incrementos expresada por $\frac{\Delta z}{\Delta x}=A+B\Delta x+C\Delta x^2+D\Delta x^3+$&c.

Ahora, suponiendo que Δx disminuya como hemos dicho [§509] se tendrá que esta relacion se irá acercando á A tanto como se quiera; por lo qual A será el límite de dicha relacion y será: *límite de* $\frac{\Delta z}{\Delta x}=A$;

más como el límite de $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ se saca suponiendo $\Delta x = 0$, en cuyo caso la equacion (α) da $\Delta z = 0$,

el límite de $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ se convierte en $\frac{0}{0}$; cuya relacion no nos dice si el 0 de arriba proviene del límite del incremento ó diferencia de la funcion ó del de la variable; y así, es indispensable elegir un signo para expresar el límite 0 de la diferencia ó incremento Δz, ó el de la Δx. Nosotros adoptaremos, como lo está en todo el continente, el que Leibnitz usó, que consiste en poner una *d* de nuestro alfabeto en vez de la Δ griega; y así, dz expresará el límite de la diferencia de la funcion z, y dx el límite de la diferencia de la variable x; pero es indispensable tener presente que el valor absoluto de dz, dx, y en general de qualquier variable precedida de la característica *d*, siempre es *cero*; y solo representa una cantidad quando está señalada la relacion entre dos de estas expresiones; y así, en el exemplo antecedente tendremos $\frac{dz}{dx} = A$.

513 Aunque dz, dx, &c. no son cantidades, *se pueden executar con estos símbolos las mismas operaciones que con las cantidades mismas.*

Para probarlo, en la equacion $\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + D\Delta x^4 + \&c.$ hallaremos la relacion $\frac{\Delta x}{\Delta z}$ y será $\frac{\Delta x}{\Delta z} = \frac{1}{A + B\Delta x + C\Delta x^2 + \&c.}$;

cuyo límite es $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{A}$; pero $A = \frac{dz}{dx}$, luego $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dx}}$, resultado que manifiesta la regla dada en el Algebra para dividir un entero por un quebrado.

Sea ahora u una funcion qualquiera de x, y z una funcion qualquiera de u, con lo qual tendremos $\begin{cases} \Delta u = A\,\Delta x + B\,\Delta x^2 + C\,\Delta x^3 + \&c. \ (a), \\ \text{y} \ \Delta z = A'\Delta u + B'\Delta u^2 + C'\Delta u^3 + \&c. \ (b), \end{cases}$

y substituyendo en esta última expresion en vez de Δu, Δu^2 &c. sus valores sacados de la primera será $\Delta z = A'A\Delta x + B\,A'\,\Delta x^2 + \&c.$
$\qquad\qquad + B'A^2\Delta x^2 + \&c.$

de donde sale $\frac{\Delta z}{\Delta x} = A'A + A'B\,\Delta x + \&c.$
$\qquad\qquad + B'A^2\Delta x + \&c.$

y pasando á los límites resultará $\frac{dz}{dx} = A'A$;

pero de las equaciones (a,b) se saca $A'=\frac{dz}{du}$, y $A=\frac{du}{dx}$,

luego se tendrá $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{du}\times\frac{du}{dx}$;

equacion que manifiesta que la *du* se puede suprimir en el numerador y en el denominador como si fuesen cantidades.

De donde se deduce que si se quita el denominador *dx* en la expresion $\frac{dz}{dx}=A$ se tendrá $dz=Adx$.

514 Como de esta expresion depende el valor de la relacion entre dichos límites, se dice que es la *diferencial de la funcion*; y da á conocer que es el primer término de la diferencia, solo con poner en vez de la Δx su límite *dx*; y como la expresion $\frac{dz}{dx}=A$ es lo que multiplica á la diferencial de la variable en la de la funcion, se ha dado á $\frac{dz}{dx}$ ó á lo que representa, el nombre de *coeficiente diferencial.* De donde se deduce que *el límite de la relacion de los incrementos ó diferencias ó el coeficiente diferencial, se obtendrá dividiendo la diferencial de la funcion por la de la variable; y recíprocamente, se obtendrá la diferencial de la funcion multiplicando el límite de la relacion de los incrementos ó el coeficiente diferencial por la diferencial de la variable.*

Luego segun todo lo expuesto, el cálculo diferencial es *aquel ramo de la análisis indeterminada, que enseña á determinar el límite de la relacion de los incrementos simultaneos de una funcion y de la variable ó variables de que depende.*

515 Aunque se puede tomar por evidente que dos funciones iguales deben tener diferenciales iguales, no obstante, como es una de las proposiciones fundamentales, es indispensable hacer palpable esta verdad: porque ninguna reflexion que aclare una proposicion está demas para el principiante.

Quando dos funciones son iguales entre sí, qualquiera que sea el valor de la variable de que dependen, es necesario que sus desarrollos ordenados con relacion á las potencias de esta variable ó de su incremento, sean idénticos á fin de que igualándolos no resulte de esta igualacion ninguna equacion que pueda determinar la una ó la otra de las cantidades de que se acaba de hablar; por consiguiente si se tiene $u=z=f.(x)$, es necesario que substituyendo $x+\Delta x$ en vez de x, y desenvolviendo se tenga $u+A\Delta x+B\Delta x^2+C\Delta x^3+\&c.=z+A'\Delta x+B'\Delta x^2+C'\Delta x^3+\&c.$ qualquiera que sea el valor de Δx, luego se tendrá $A\Delta x=A'\Delta x$;

ó pasando á los límites $A\,dx = A'dx$; y como Adx es la diferencial du de u y $A'dx$ la dz de z se tendrá $du = dz$.

La inversa de esta proposicion en general no es verdadera; y se caeria en error si siempre *se asegurase que dos diferenciales iguales pertenecian á funciones iguales.*

En efecto, si se tubiese $u = a + \frac{b}{c} f.(x)$,

se hallaria que llamando z' á lo que resulta de substituir en vez de x, $x + \Delta x$ se tendrá $u' = a + \frac{b}{c} f.(x + \Delta x)$;

y restando de esta equacion la anterior, resultará

$u' - u = a + \frac{b}{c} f.(x + \Delta x) - a - \frac{b}{c} f.(x)$;

y señalando con Δu el valor de $u' - u$, y haciendo la destruccion se tendrá $\Delta u = \frac{b}{c}[f.(x + \Delta x) - f.(x)]$;

y como lo que hay dentro del paréntesis es igual con $\Delta f.(x)$, resultará

$$\Delta u = \frac{b}{c} \Delta f.(x);$$

y pasando á los límites será $du = \frac{b}{c} df.(x)$,

resultado en el que no queda ningun vestigio de la constante a. Luego la diferencial $\frac{b}{c} df.(x)$ pertenece igualmente á $a + \frac{b}{c} f.(x)$ que á $\frac{b}{c} f.(x)$; y conviene generalmente á los diferentes casos que presenta la funcion $a + \frac{b}{c} f.(x)$, quando se dan á a diferentes valores ó todos los valores posibles. Donde se advierte que en la diferenciacion de una funcion qualquiera todas las constantes combinadas solo por via de adicion ó de substraccion desaparecen; las que estan por via de multiplicacion ó division quedan afectando á las diferenciales del mismo modo que afectaban á las variables.

516 Quando dos cantidades z y x estan unidas por una dependencia mutua, se puede decir igualmente que z es funcion de x, ó que x es funcion de z, segun se quiera mirar á z como determinada por medio de x, ó á x como determinada por medio de z; el coeficiente diferencial tambien se puede mirar baxo cada uno de estos dos aspectos.

Quando se tiene $dz=Adx$ se concluye $\frac{dz}{dx}=A$, si se considera la z como debiendo ser determinada por medio de x, y $\frac{dx}{dz}=\frac{1}{A}$ quando se supone x determinada por medio de z; en este último caso la diferencial de x es $dx=\frac{1}{A}dz=\frac{dz}{A}$.

517 Apliquemos ahora lo que precede á la investigacion de las diferenciales de las funciones que se presentan en el Algebra. Estas funciones son sumas, diferencias, productos, quocientes, potencias y raices. Consideremos primeramente el caso en que se tienen muchas cantidades dependientes de x reunidas por via de suma ó resta; como por exemplo la expresion $z=u+v-w$, donde u,v, y w son funciones de x; segun lo expuesto [511] se tendrá $z'=u+A\Delta x+B\Delta x^2+\&c.+\ldots$
$v+A'\Delta x+B'\Delta x^2+\&c.-(w+A''\Delta x+B''\Delta x^2+\&c.)$
y restando de esta equacion la primitiva se tendrá $z'-z=\Delta z=\ldots$
$A\Delta x+B\Delta x^2+\&c.+A'\Delta x+B'\Delta x^2+\&c.-A''\Delta x-B''\Delta x^2-\&c.$
y hallando la relacion será

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=A+B\Delta x+\&c.+A'+B'\Delta x+\&c.-A''-B''\Delta x-\&c.,$$

ó pasando al límite $\frac{dz}{dx}=A+A'-A''$;

y quitando el divisor $dz=Adx+A'dx-A''dx$; pero Adx,$A'dx$, $A''dx$ son las diferenciales que corresponden á cada una de las funciones u,v,w. ó du.dv.dw; luego se tendrá $dz=d(u+v-w)=du+dv-dw$, *es decir que la diferencial de una funcion de x compuesta de muchos términos se obtendrá tomando la diferencial de cada término con el signo de que esté afecto este término.*

518 Entendido esto, pasarémos al producto de dos funciones de una misma variable. Sea $z=ut$, donde u y t son funciones de x, y tendremos $u=f.(x)$, y tambien será t igual á otra funcion qualquiera $f'.(x)$ de x, y tendremos $\begin{cases} u'=u+A\,\Delta x+B\,\Delta x^2+C\,\Delta x^3+\&c., \\ t'=t+A'\Delta x+B'\Delta x^2+C'\Delta x^3+\&c. \end{cases}$

lo que dará $z'=u'\times t'=(u+A\Delta x+B\Delta x^2+\&.)(t+A'\Delta x+B'\Delta x^2+\&.)=$

$$\begin{aligned} & ut+At\,\Delta x+Bt\Delta x^2+\&c. \\ & \quad +A'u\Delta x+A'A\Delta x^2+\&c. \\ & \qquad +B'u\Delta x^2+\&c. \end{aligned}$$

y restando de esto $z=ut$ será $\Delta z=z'-z=\begin{array}{l} A\ t\Delta x+B\ t\Delta x^2+\&c. \\ +A'u\Delta x+A'A\Delta x^2+\&c. \\ +B'u\,\Delta x^2+\&c. \end{array}$

y hallando la relacion será $\frac{\Delta z}{\Delta x}=\begin{array}{l} At+Bt\ \ \Delta x+\&c. \\ +A'u+A'A\Delta x+\&c. \\ +B'u\ \ \Delta x+\&c. \end{array}$

y pasando á los límites, como los términos donde entra Δx se reducen á cero, se tendrá $\frac{dz}{dx}=At+A'u$,

ó quitando el divisor $dz=Atdx+A'udx=t\times Adx+u\times A'dx$;
pero Adx es igual con la diferencial du de u, y $A'dx$ es la diferencial dt de t, luego tendremos $dz=d.ut=t\times du+u\times dt$,
lo que nos enseña que *para tener la diferencial del producto de dos funciones es necesario multiplicar cada una por la diferencial de la otra*; y como siendo u,t, funciones de x las podemos considerar en general como variables, resulta que quando se tiene una funcion que es el producto de dos variables, *para hallar su diferencial, no hay mas que multiplicar cada una por la diferencial de la otra y reunir estos productos.*

519 Si quisiéramos comparar ahora la diferencial de una funcion con la misma funcion, dividiríamos los dos miembros de la equacion $d.ut=udt+tdu$ por la funcion primitiva ut

y tendríamos $\frac{d.ut}{ut}=\frac{du}{u}+\frac{dt}{t}$,

lo que nos suministra otra nueva verdad y es *que la relacion que tiene la diferencial de una funcion de dos variables con la misma funcion, es igual á la suma de todas las relaciones que tiene la diferencial de cada variable con la misma variable*; lo qual nos conducirá á la expresion de la diferencial de un producto compuesto de tantos factores como se quiera; porque si tubiéramos $z=urs$, haciendo $rs=t$

seria $z=ut$, y $\frac{dz}{z}=\frac{du}{u}+\frac{dt}{t}$,

pero como $\frac{dt}{t}=\frac{d.rs}{rs}=\frac{dr}{r}+\frac{ds}{s}$ y $\frac{dz}{z}=\frac{d.urs}{urs}$,

tendrémos $\frac{d.urs}{urs}=\frac{du}{u}+\frac{dr}{r}+\frac{ds}{s}$;

y del mismo modo se hallaria que siendo $z=ursty....\&c.$,

se tendria $\frac{dz}{z}=\frac{d.ursty...\&c.}{ursty...\&c.}=\frac{du}{u}+\frac{dr}{r}+\frac{ds}{s}+\frac{dt}{t}+\frac{dy}{y}+\&c.$

y si ahora quitamos el denominador en esta expresion, se tendrá

$dz=d.ursty...=rsty...du+usty...dr+urty...ds+ursy...dt+urst...dy+\&.$

lo que nos dice que *qualquiera que sea el número de factores variables de una funcion, la diferencial de su producto será igual á la suma de los productos de la diferencial de cada uno de ellos por el producto de los demas.*

520 Si la funcion z estubiese representada ahora por el quebrado $\frac{u}{t}$, tendríamos $\frac{u}{t}=z$, de donde $u=zt$, y [§518] $du=zdt+tdz$, de donde despejando dz tendremos $dz=\frac{du}{t}-\frac{zdt}{t}$, y substituyendo en lugar de z su valor $\frac{u}{t}$ resultará

$$dz=d.\frac{u}{t}=\frac{du}{t}-\frac{\frac{u}{t}dt}{t}=\frac{du}{t}-\frac{udt}{t^2}=\frac{tdu-udt}{t^2};$$

de donde resulta que *la diferencial de un quebrado es igual al denominador multiplicado por la diferencial del numerador, menos el numerador por la diferencial del denominador, y dividido todo esto por el quadrado del denominador.*

521 Quando el numerador de la fraccion es constante y la funcion es por exemplo $z=\frac{a}{t}$, entónces haríamos $u=a$, y como a, siendo constante, no tiene diferencial, el término $tdu=tda=t.0=0$ desaparecerá de la expresion anterior y se tendrá $dz=d.\frac{a}{t}=-\frac{adt}{t^2}$, que nos dice que la *diferencial de un quebrado cuyo numerador es constante, es igual al numerador tomado con un signo contrario multiplicado por la diferencial del denominador, y dividido esto por el quadrado del denominador.*

522 Para hallar la diferencial de las funciones $z=x^n$, supondremos primero que n sea un número entero y positivo, y por lo mismo z será el producto de un número n de factores iguales á x; por lo que en virtud de lo expuesto [519] será

$$\frac{dz}{z}=\frac{d.x^n}{x^n}=\frac{d.x.x.x.x.x....}{x.x.x.x.x.....}=\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x}+....$$

y como siendo n el número de factores del primer miembro, el segundo

tambien se compone de n términos, y todos estos son iguales á $\frac{dx}{x}$,

se tendrá $\frac{d.z}{z}=\frac{d.x^n}{x^n}=\frac{ndx}{x}$,

ó quitando el divisor $dz=d.x^n=\frac{nx^n dx}{x}=nx^{n-1}dx$.

Si suponemos ahora que la funcion sea $z=x^{\frac{p}{q}}$ siendo p y q números enteros y positivos; elevando á la potencia q tendremos $z^q=x^p$, de donde $d.z^q=d.x^p$;
pero siendo p y q números enteros y positivos se tendrá por lo acabado de demostrar $d.z^q=qz^{q-1}dz$ y $d.x^p=px^{p-1}dx$,
luego resultará $qz^{q-1}dz=px^{p-1}dx$, y despejando dz

será $dz=\frac{px^{p-1}dx}{qz^{q-1}}=\frac{p}{q}\times\frac{x^{p-1}dx}{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}}=\frac{p}{q}\times\frac{x^{p-1}dx}{x^{p-\frac{p}{q}}}=$

$\frac{p}{q}x^{p-1-p+\frac{p}{q}}dx=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}dx$,

que es lo mismo que antes suponiendo $n=\frac{p}{q}$.

En fin, si fuese negativo el exponente y le representamos por $-n$, se tendrá $z=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$, de donde se saca [§521]

$dz=d.x^{-n}=d.\frac{1}{x^n}=\frac{-1.d.x^n}{x^{2n}}=-\frac{dx^n}{x^{2n}}$;

y como por lo que precede $dx^n=nx^{n-1}dx$,

resultará $dz=d.x^{-n}=\frac{-nx^{n-1}dx}{x^{2n}}=-nx^{n-1-2n}dx=-nx^{-n-1}dx$.

De esta enumeracion de casos en que puede hallarse el exponente n resulta *que para diferenciar una potencia qualquiera de una cantidad variable ó de una funcion, es necesario multiplicarla por su exponente; disminuir despues el exponente en una unidad, y multiplicar el resultado por la diferencial de la variable ó de la funcion.*

523 Las reglas dadas hasta aqui bastan para diferenciar todas las funciones en que la variable no está enlazada sino por adicion, substraccion, multiplicacion, division, elevacion á potencias enteras ó fraccionarias, positivas ó negativas. Vamos á diferenciar algunas para manifestar la aplicacion de las reglas.

Sea $z=ax^2+bx^4+c$; como [§ 517] la diferencial de una expresion compuesta de dos ó mas términos variables es igual á la diferencial de cada uno de los términos, tendremos $dz=d.ax^2+d.bx^4+d.c$; pero $d.ax^2=2axdx$, $d.bx^4=4bx^3dx$, y $d.c=0$, porque las constantes no tienen diferenciales, pues no siendo susceptibles de incrementos, tampoco puede haber límites de estos; luego será $dz=2axdx+4bx^3dx$;

y si se nos pidiese el coeficiente diferencial tendríamos $\frac{dz}{dx}=2ax+4bx^3$.

Sea ahora $z=a+b\sqrt{x}+\frac{c}{x}$; tomando separadamente la diferencial de cada término, la del primero desaparece por ser constante; el segundo puesto baxo la forma $bx^{\frac{1}{2}}$,

da $d.bx^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}bx^{\frac{1}{2}-1}dx=\frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\frac{bdx}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{bdx}{2\sqrt{x}}$,

la del tercero $\frac{c}{x}$ es [521] $-\frac{cdx}{x^2}$;

y reuniendo los resultados parciales

se tendrá $dz=\frac{bdx}{2\sqrt{x}}-\frac{cdx}{x^2}=\left(\frac{b}{2\sqrt{x}}-\frac{c}{x^2}\right)dx$,

y el coeficiente diferencial será $\frac{dz}{dx}=\frac{b}{2\sqrt{x}}-\frac{c}{x^2}$.

Sea ahora la funcion $z=a+\frac{b}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{c}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{e}{x^2}$;

haremos que esta funcion se reduzca á exponentes de la variable en el numerador y será $z=a+bx^{-\frac{2}{3}}-cx^{-\frac{4}{3}}+ex^{-2}$,

y aplicando á cada término la regla dada [§ 522] tendremos

$dz=-\frac{2}{3}bx^{-\frac{5}{3}}dx+\frac{4}{3}cx^{-\frac{7}{3}}dx-2ex^{-3}dx=-\frac{2bdx}{3x^{\frac{5}{3}}}+\frac{4cdx}{3x^{\frac{7}{3}}}-\frac{2edx}{x^3}$,

y poniendo en vez de los exponentes fraccionarios, los radicales pues que en ello venia propuesta la qüestion resultará

$$dz=-\frac{2bdx}{3x\sqrt[3]{x^2}}+\frac{4cdx}{3x^2\sqrt[3]{x}}-\frac{2edx}{x^3},$$

y el coeficiente diferencial será $\frac{dz}{dx}=-\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}}+\frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}}-\frac{2e}{x^3}$.

524 Los exemplos propuestos hasta aqui no comprenden sino monomios; pero hay funciones que no pueden descomponerse en términos de esta forma sin un desarrollo preparativo; tal es por exemplo la funcion $z=(a+bx^m)^n$, para aplicar á ella la regla [§ 522] sin necesidad de desenvolverla, se considerará el binomio $a+bx^m$ como una funcion particular u de modo que será $z=u^n$; y observando que la diferencial de u^n es generalmente $nu^{n-1}du$ se concluirá $dz=n(a+bx^m)^{n-1}d.(a+bx^m)$; y como $d.(a+bx^m)=d.bx^m=mbx^{m-1}dx$ resulta que $dz=n(a+bx^m)^{n-1}mbx^{m-1}dx=nmbx^{m-1}.(a+bx^m)^{n-1}dx$.

525 Si se tubiese $z=\sqrt{a+bx+cx^2}$ se miraria este trinomio como una funcion particular u; y como la diferencial de $\sqrt{u}$ ó de $u^{\frac{1}{2}}$, es $\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}du=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{du}{2\sqrt{u}}$, resultará $dz=d.u^{\frac{1}{2}}=\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{d(a+bx+cx^2)}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{bdx+2cxdx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}$.

Como ocurre con mucha freqüencia diferenciar radicales de segundo grado, traduciremos en regla el resultado $\frac{du}{2\sqrt{u}}$ de la diferenciacion del radical $\sqrt{u}$, y diremos que *la diferencial de un radical de segundo grado se obtiene dividiendo la de la cantidad que se encuentra debaxo del signo radical por el duplo del radical.*

526 Aplicando esta regla y la dada [519] á la funcion

$$z=x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}, \text{ tendremos}$$

$$dz=(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}.dx+x\sqrt{a^2-x^2}\ d.(a^2+x^2)+x(a^2+x^2)d\sqrt{a^2-x^2};$$

pero $d(a^2+x^2)=d.x^2=2xdx$; $d\sqrt{a^2-x^2}=\frac{-2xdx}{2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

luego substituyendo estos valores arriba, tendremos sacando fuera de un paréntesis el factor comun dx

$$dz=[(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}+2x^2\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}]dx,$$

ó reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña

$$dz=\frac{(a^2+x^2)(a^2-x^2)+2x^2(a^2-x^2)-x^2(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\ldots$$

$$\frac{a^4-x^4+2a^2x^2-2x^4-a^2x^2-x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{a^4-4x^4+a^2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$$

Si tubiésemos $z=\dfrac{a^2-x^2}{a^4+a^2x^2+x^4}$, resultaria

$$dz=\frac{(a^4+a^2x^2+x^4)d(a^2-x^2)-(a^2-x^2)d(a^4+a^2x^2+x^4)}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2},$$

que se convierte, executando las operaciones indicadas en el numerador y reduciendo, en $dz=\dfrac{-2x(2a^4+2a^2x^2-x^4)dx}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2}$.

527 Terminaremos estos exemplos por la funcion

$$z=\sqrt[4]{\left(a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}\right)^3}$$

que comprende muchas operaciones algebráicas que se pueden efectuar sucesivamente. Para facilitar la diferenciacion conviene á los principios hacer algunas substituciones, de manera que haremos

$\dfrac{b}{\sqrt{x}}=t$, $\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}=u$, y tendremos

$z=\sqrt[4]{(a-t+u)^3}=(a-t+u)^{\frac{3}{4}}$, lo que nos dará [§ 524]

$$dz=\tfrac{3}{4}(a-t+u)^{\frac{3}{4}-1}d(a-t+u)=\tfrac{3}{4}(a-t+u)^{-\frac{1}{4}}d(a-t+u)=\ldots$$

$$\frac{3d(a-t+u)}{4\sqrt[4]{a-t+u}}=\frac{-3dt+3du}{4\sqrt[4]{a-t+u}};$$

y como $dt=-\dfrac{bd\sqrt{x}}{x}=-\dfrac{b\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}}{x}=-\dfrac{bdx}{2x\sqrt{x}}$,

$$du=d\,(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}}=\tfrac{2}{3}(c^2-x^2)^{-\frac{1}{3}}d(c^2-x^2)=\frac{2d(c^2-x^2)}{3\sqrt[3]{c^2-x^2}}=\frac{-4xdx}{3\sqrt[3]{c^2-x^2}},$$

resultará por último

$$dz=\frac{-3\times\dfrac{-bdx}{2x\sqrt{x}}+3\times\dfrac{-4xdx}{3\sqrt[3]{c^2-x^2}}}{4\sqrt[4]{a-\dfrac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}}=\frac{\dfrac{3b}{2x\sqrt{x}}-\dfrac{4x}{\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}}{4\sqrt[4]{a-\dfrac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}}\,dx.$$

528 Como toda expresion es susceptible de diferenciacion, y es sumamente importante el ponerse diestros en diferenciar, pondremos aqui algunas expresiones con sus diferenciales, á fin de que los principiantes indaguen las substituciones y transformaciones que deben dar para encontrar las mismas diferenciales por sí mismos.

Si fuese $z = \sqrt[5]{\left(ax^2 + \frac{b}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{2ax - x^2}\right)^4}$

se tendria $$dz = \frac{4\left(2ax - \frac{b}{3x\sqrt[3]{x}} + \frac{2a - 2x}{3\sqrt[3]{(2ax - x^2)^2}}\right)}{5\sqrt[5]{ax^2 + \frac{b}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{2ax - x^2}}}\,dx.$$

Si fuese $z = \sqrt[3]{\left(ax - \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt{2cx - x^2}\right)^2}$

se tendria $$dz = \frac{2\left(a + \frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{c - x}{\sqrt{2cx - x^2}}\right)}{3\sqrt[3]{ax - \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt{2cx - x^2}}}\,dx.$$

Si fuese $z = \frac{x}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}$ se tendria $dz = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}\,(x + \sqrt{a^2 + x^2})^2}\,dx.$

De las diferenciales segundas, terceras, &c. y de su uso para desenvolver en serie las funciones, y hallar sus incrementos.

529 Siendo el coeficiente diferencial una nueva funcion de x, se puede someter á la diferenciacion, y dar para el límite de la relacion de su incremento con el de la variable x, su propio coeficiente diferencial que será tambien una funcion de x. Haciendo suceder así unas diferenciales á otras, se deduce de la funcion propuesta una serie de límites ó de coeficientes diferenciales que se distinguen en órdenes, segun el número de diferenciaciones que se han necesitado efectuar para obtenerlos.

Así es, que si siendo $z = f.(x)$, al primer coeficiente diferencial le llamamos A, tendremos $\frac{dz}{dx} = A$;

y como A es una funcion de x que se deriva por una ley constante de $f.(x)$ la llamaremos $f'.(x)$; y siendo $A=f'.(x)$, esto es, siendo A una funcion de x, será susceptible de diferenciacion, y el coeficiente diferencial será $\frac{dA}{dx}$, que si le llamamos B como ha de expresar otra funcion de x, que se deriva de $f'.(x)$ del mismo modo que $f'.(x)$ de $f.(x)$, se tendrá $B=f''.(x)$,

y su coeficiente diferencial será $\frac{dB}{dx}=C=f'''.(x)$&c.

y así, A ó $f'.(x)$ representará el coeficiente diferencial de primer órden de la funcion propuesta, ó la *funcion primera* como la llama Lagrange; B el de la funcion A ó el coeficiente diferencial de segundo órden de la funcion propuesta; C el 1.º de la funcion B ó el segundo de la funcion A, ó el tercero de la funcion propuesta $f.x.$&c. y se debe observar que los coeficientes B,C,&c. se sacan de las diferenciales sucesivas de dz, tomadas en el supuesto de ser dx constante. Nosotros señalaremos estas diferenciales así $d(dz)=ddz=d^2z$,$d(d^2z)=d^3z$,&c.

530 El exponente que afecta á la característica d indica una operacion repetida, y no una potencia de la letra d que jamas se considera como una cantidad sino solo como un signo. Esto supuesto, las equaciones $\frac{dz}{dx}=A$, $\frac{dA}{dx}=B$, $\frac{dB}{dx}=C$, &c. darán

$$dz=Adx;\ dA=Bdx;\ dB=Cdx,\ \&c.$$

diferenciando de nuevo la primera sin hacer variar á dx, se convertirá en $d^2z=dAdx$,

y poniendo en vez de dA su valor sacado de la segunda, se tendrá

$d^2z=Bdxdx=Bdx^2$, de donde $B=\frac{d^2z}{dx^2}$;

diferenciando de nuevo la equacion $d^2z=Bdx^2$ en el mismo supuesto de ser dx constante se hallará $d^3z=dBdx^2$,

y como por la tercera equacion $dB=Cdx$ será $d^3z=Cdxdx^2=Cdx^3$,

ó $C=\frac{d^3z}{dx^3}$; luego se tendrá $A=\frac{dz}{dx}$. $B=\frac{d^2z}{dx^2}$. $C=\frac{d^3z}{dx^3}$. &c.

531 Si la funcion propuesta fuese por exemplo $z=ax^n$, se tendria

$$dz=d.ax^n=nax^{n-1}dx,$$

y suponiendo constantes n y dx en esta equacion diferencial, si volvemos á diferenciar será $d^2z=d^2.ax^n=d.d.ax^n=d.nax^{n-1}dx=....$ $nadx.dx^{n-1}=nadx(n-1)x^{n-2}dx=n(n-1)ax^{n-2}dx^2$;

y del mismo modo se encontraria

$d^3z=d^3.ax^n=n(n-1)(n-2)ax^{n-3}dx^3$,

$d^4z=d^4.ax^n=n(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4}dx^4$,

$d^5z=d^5.ax^n=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)ax^{n-5}dx^5$,

&c.

y los coeficientes diferenciales tendrán los valores siguientes:

$$\frac{dz}{dx}=nax^{n-1},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=n(n-1)ax^{n-2},$$

$$\frac{d^3z}{dx^3}=n(n-1)(n-2)ax^{n-3},$$

$$\frac{d^4z}{dx^4}=n(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4},$$

$$\frac{d^5z}{dx^5}=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)ax^{n-5},$$

&c.

Donde se advierte que en el caso en que n sea un número entero positivo la funcion $z=ax^n$ no tiene mas que un número limitado de diferenciales, de la qual la mas elevada es

$d^nz=d^n.ax^n=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)....1adx^n$,

expresion que no es susceptible de mas diferenciacion, pues que no contiene ya mas variables; luego se tendrá entonces para el último coeficiente diferencial $\frac{d^nz}{dx^n}=\frac{d^n.ax^n}{dx^n}=n(n-1)(n-2)(n-3).\ldots\ldots 1.a$, es decir, una cantidad constante.

532 Como conviene tambien ponerse muy diestros en encontrar los coeficientes diferenciales, nos propondremos la siguiente expresion para hallar todos los coeficientes diferenciales, á saber,

$z=ax^7+bx^6+cx^5+ex^4+fx^3+gx^2+hx+l$,

y se tendrá

$$\frac{dz}{dx}=7ax^6+6bx^5+5cx^4+4ex^3+3fx^2+2gx+h,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=6\times7ax^5+5\times6bx^4+4\times5cx^3+3\times4ex^2+2\times3fx+2g,$$

$$\frac{d^3z}{dx^3}=5\times6\times7ax^4+4\times5\times6bx^3+3\times4\times5cx^2+2\times3\times4ex+2\times3f,$$

$$\frac{d^4z}{dx^4}=4\times5\times6\times7ax^3+3\times4\times5\times6bx^2+2\times3\times4\times5cx+2\times3\times4e,$$

$$\frac{d^5z}{dx^5}=3\times4\times5\times6\times7ax^2+2\times3\times4\times5\times6bx+2\times3\times4\times5c,$$

$$\frac{d^6z}{dx^6}=2\times3\times4\times5\times6\times7ax+2\times3\times4\times5\times6b,$$

$$\frac{d^7z}{dx^7}=2\times3\times4\times5\times6\times7a;$$

y como este coeficiente diferencial es una cantidad constante, ya tenemos que no tendrá diferencial; y por lo mismo los coeficientes diferenciales de los órdenes superiores serán cero. Aqui se observa que a cada operacion va desapareciendo una constante.

533 Fundados en esto tenemos un medio muy simple para desenvolver en serie segun las potencias enteras de x, toda funcion suya que sea susceptible de esta forma, y cuyos coeficientes diferenciales sucesivos se pueden encontrar. Sea $z=\varphi(x)$ esta funcion; y como por el supuesto se quiere transformar en una serie ordenada por las potencias enteras de x, se tendrá $z=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\&c.$ (m),
y hallando los coeficientes diferenciales será

$$\frac{dz}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\&c.$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=2C+2\times3Dx+3\times4Ex^2+\&c.$$

$$\frac{d^3z}{dx^3}=2\times3D+2\times3\times4Ex+\&c.$$

$$\frac{d^4z}{dx^4}=2\times3\times4E+\&c.$$

&c.

Como las cantidades $A, B, C, D,$ &c. son independientes de x, resulta que el valor que tengan en un valor particular de x, ese tendrán en qualquiera otro; luego sus valores los podremos determinar haciendo $x=0$; y como haciendo $x=0$, el desarrollo de la funcion primitiva se convierte en A, tenemos que el primer coeficiente A es igual á aquello en que se convierte la funcion primitiva, haciendo en ella la variable igual con 0; y si llamamos A', A'', A''', A^{IV}, &c. á aquello en que se convierten los coeficientes diferenciales $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3}, \frac{d^4z}{dx^4}$, &c.

en este mismo supuesto, se tendrá que haciendo $x=0$ en los valores de estos que acabamos de sacar será

$A'=B$; $A''=1\times2C$; $A'''=1\times2\times3D$; $A^{IV}=1\times2\times3\times4E$, &c.

de donde resulta

$$B=\frac{1}{1}A';\ C=\frac{1}{1\times2}A'';\ D=\frac{1}{1\times2\times3}A''',\ E=\frac{1}{1\times2\times3\times4}A^{IV},\ \&c.$$

Luego si substituimos estos valores en la equacion (m) resultará

$$z=f.(x)=A+\frac{1}{1}A'x+\frac{1}{1\times2}A''x^2+\frac{1}{1\times2\times3}A'''x^3+\frac{1}{1\times2\times3\times4}A^{IV}x^4\&.\ (n).$$

Luego para desenvolver en serie una funcion qualquiera de una variable podemos dar esta regla: *supóngase* $x=0$ *en la funcion primitiva y se tendrá el primer término de la serie; hállese el primer coeficiente diferencial, supóngase en él la variable igual cero, pártase por uno y se tendrá el coeficiente de* x; *y en general para hallar el coeficiente del término donde la variable esté afecta del exponente* n, *hállese el coeficiente diferencial del órden* n, *supóngase en él la variable* $x=0$, *pártase esto por el producto* $1\times2\times3\times4\times5\ldots n$ *y se tendrá el coeficiente de* x^n *en el desarrollo de la funcion.*

534 Si tomamos por exemplo la funcion $z=(a+x)^n$, tendremos que hacer $x=0$ para encontrar A y resultará $A=a^n$; hallando el primer coeficiente diferencial será $\frac{dz}{dx}=n(a+x)^{n-1}$,

y como para sacar el valor de A' es preciso hacer $x=0$ será $A'=na^{n-1}$; hallando el segundo coeficiente diferencial será

$$\frac{d^2z}{dx^2}=n(n-1)(a+x)^{n-2},$$

que haciendo $x=0$ se convertirá en $A''=n(n-1)a^{n-2}$;

hallando el tercer coeficiente diferencial será

$$\frac{d^3z}{dx^3}=n(n-1)(n-2)(a+x)^{n-3},$$

que haciendo $x=0$ se convertirá en $A'''=n(n-1)(n-2)a^{n-3}$;

hallando del mismo modo los demas coeficientes diferenciales y haciendo en ellos $x=0$ resultará
$$\begin{cases}A^{IV}=n(n-1)(n-2)(n-3)a^{n-4},\\ A^{V}=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)a^{n-5};\\ \&c.\end{cases}$$

Luego substituyendo estos valores en la equacion (n) se nos convertirá en $z=(a+x)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\times2}a^{n-2}x^2+\ldots$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times2\times3}a^{n-3}x^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\times2\times3\times4}a^{n-4}x^4+\&c.$$

Como los principios de la diferenciacion los hemos expuesto sin suponer el desarrollo de $(a+x)^n$, podemos mirarle ahora como probado para todos los casos en que el exponente es entero ó fraccionario, positivo ó negativo; y vemos que nos da la misma forma que sacámos [I. 302]

535 Esto mismo nos va á conducir á expresar por medio de los coeficientes diferenciales el desarrollo general del valor que toma la funcion $z=f.(x)$ quando se substituye $x+\Delta x$ en vez de x, ó $x+k$, porque hemos visto que entonces se tiene $z'=f.(x)+Ak+Bk^2+Ck^3+Dk^4$&c. y como alli no hemos dado á conocer un método general para determinar A, B, C, &c. inmediatamente, dada la funcion, vamos ahora á manifestarlo; pero quando hemos tratado de esto hemos considerado á la funcion $z'=f.(x+k)$ como funcion de k, y con relacion á ella la hemos ordenado; luego z' tendrá esta forma [§533]

$$z'=A+\frac{A'}{1}k+\frac{A''}{1\times2}k^2+\frac{A'''}{1\times2\times3}k^3+\frac{A^{IV}}{1\times2\times3\times4}k^4+\&c.$$

y aqui entenderemos por A, A', A'', A''', &c. el valor que toman

$z'=f.(x+k)$, $\frac{dz'}{dk}, \frac{d^2z'}{dk^2}, \frac{d^3z'}{dk^3}$, &c. quando en estas expresiones se hace $k=0$; pero desde luego se ve que haciendo $k=0$, $z'=f.(x+k)$ se convierte en $f.(x)$, esto es, en z. Por otra parte *los coeficientes diferenciales de antes, mirando á* k *como variable y á* x *como constante, son los mismos que los que se hallarian considerando á* x *como variable y á* k *como constante*; porque si suponemos $x'=x+k$ la funcion z' se compondrá de x' del mismo modo que la funcion z se componia de x; de donde se concluirá $dz'='Adx'$,
siendo $'A$ una funcion de x' y $dx'=d(x+k)$; sino se hace variar sino k

se tendrá $dx'=dk, dz'='Adk$, y $\frac{dz'}{dk}='A$,

no haciendo variar sino x se obtendrá

$dx'=dx, dz'='Adx$ y $\frac{dz'}{dx}='A$ luego $\frac{dz'}{dk}=\frac{dz'}{dx}$.

La funcion $'A$ siendo una funcion de x' se tendrá aun $\frac{d'A}{dk}=\frac{d'A}{dx}$,

de donde $\frac{d^2z'}{dk^2}=\frac{d^2z'}{dx^2}$, y en general $\frac{d^nz'}{dk^n}=\frac{d^nz'}{dx^n}$.

Esto supuesto, quando $k=0$, z' convirtiéndose en z,

resultará $A'=\frac{dz}{dx}$, $A''=\frac{d^2z}{dx^2}$, $A'''=\frac{d^3z}{dx^3}$, &c.

$$y\ z'=z+\frac{dz}{dx}\times\frac{k}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\frac{d^4z}{dx^4}\times\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}+\&c. (c)$$

Esta fórmula que se conoce con el nombre de *teorema de Taylor*, porque este Geómetra ingles fue su inventor, se debe mirar como la base del cálculo diferencial. La (n) [533] tambien es del mismo autor, y la deduce de esta, la qual se conoce con el nombre de *teorema de Taylor transformado para desenvolver en series las funciones.*

536 Esta fórmula contiene tambien implícitamente el desarrollo del binomio de Neuton, porque si se supone $z=x^n, z'$ se convertirá en $(x+k)^n$, y hallando los coeficientes diferenciales $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3}$, &c. y substituyendo sus valores $nx^{n-1}, n(n-1)x^{n-2}, n(n-1)(n-2)x^{n-3}$, &c. en la fórmula (o) se tendrá

$$z'=(x+k)^n=x^n+nx^{n-1}\frac{k}{1}+n(n-1)x^{n-2}\frac{k^2}{1\times2}+\ldots$$

$$n(n-1)(n-2)x^{n-3}\frac{k^3}{1\times2\times3}+n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}+\&c.$$

537 Tambien el teorema de Taylor manifiesta que los diversos coeficientes diferenciales tienen aun la propiedad notable de formar, quando se les divide por los productos $1, 1\times2, 1\times2\times3, 1\times2\times3\times4$, &c. los multiplicadores de las potencias del incremento k en el desarrollo completo de la diferencia; porque quitando z de ambos miembros da

$$z'-z=\frac{dz}{dx}\times\frac{k}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\&c.$$

pero llamando Δz á $z'-z$ y Δx al incremento k, porque es el incremento que ha sobrevenido á x, tendremos

$$\Delta z=\frac{dz}{dx}\times\frac{\Delta x}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{\Delta x^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{\Delta x^3}{1\times2\times3}+\&c. (p).$$

538 Quando no se tiene mas de una equacion entre tres variables, es necesario fixar primero los valores de dos qualesquiera de estas para determinar la tercera, que es por consiguiente una funcion de las dos primeras.

Si se tiene por exemplo la equacion $x^2+u^2+z^2=a^2$, no se podrá obtener z sin haber señalado de antemano valores á x y á u; pero conviene observar que las cantidades x y u, no estando enlazadas por ninguna relacion, la segunda puede permanecer la misma aunque la primera haya mudado y recíprocamente.

De donde resulta que el valor de z puede variar de muchas maneras: 1.º en conseqüencia de una mudanza que haya sobrevenido á x ó a u solamente; y 2.º por el concurso de estas dos circunstancias. En el primer caso, la cantidad u ó la cantidad x siendo considerada como constante, la equacion propuesta viene á ser en realidad una equacion de

dos variables; así, quando x sola muda, se tiene diferenciando y dividiendo por 2, que $xdx+zdz=0$, ó $x+z\frac{dz}{dx}=0$,

y quando u varía será $udu+zdz=0$, ó $u+z\frac{dz}{du}=0$.

Luego se tiene sucesivamente $dz=-\frac{xdx}{z}$, $dz=-\frac{udu}{z}$;

donde se debe advertir que la primera de estas diferenciales es relativa á la variabilidad particular de x, y la segunda á la de u; lo que se expresa diciendo que la una es la *diferencial parcial* relativa á x, y la otra la *diferencial parcial* relativa á u.

Los coeficientes diferenciales análogos son $\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z}$, $\frac{dz}{du}=-\frac{u}{z}$.

En general, quando se trata de una funcion de muchas variables, se debe uno acordar que en $\frac{dz}{dx}$, dz es la diferencial parcial de z relativamente á x, mientras que en $\frac{dz}{du}$. dz es la diferencial parcial relativa á u; más para mayor claridad se señala la diferencial parcial de z con relacion á x, por $\frac{d.z}{dx}.dx$, y con relacion á u por $\frac{d.z}{du}.du$.

539 Representemos por $z=f.(x,u)$ una funcion qualquiera de x y de u; suponiendo primero que solo se altere la variable x, y que se convierta en $x+k$, será necesario considerar á u como constante, y á la funcion propuesta como si solo fuese funcion de x; luego tendremos en virtud del teorema de Taylor [§535]

$$f.(x+k,u)=z+\frac{dz}{dx}\times\frac{k}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\&c.$$

Si se quisiera encontrar en lo que se convierte la funcion propuesta, quando u sola toma un incremento h, se consideraria á x como constante, y á z ó $f.(x,u)$ como una funcion de u, lo que daria

$$f.(x,u+h)=z+\frac{dz}{dx}\times\frac{h}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{h^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{h^3}{1\times2\times3}+\&c.$$

Supongamos ahora que las cantidades x y u varian al mismo tiempo, y que se conviertan en $x+k.u+h$; como no se ha señalado ningun valor particular á la funcion $f.(x,u)$, no es posible hacer en ella á un mismo tiempo las dos substituciones indicadas; pero se percibe con claridad que se llegará al mismo resultado convirtiendo primero á x en $x+k$,

y poniendo despues $u+h$ en vez de u en el desarrollo que se haya obtenido por la primera operacion.

Luego, como teníamos ya que

$$f.(x+k,u)=z+\frac{dz}{dx}\times\frac{k}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\&c.\ (q)$$

en la que z es igual con $f.(x,u)$, resultará que para desenvolver los coeficientes de los diferentes términos de esta serie, teniendo relacion con la mudanza relativa á u, será necesario considerar en cada uno de ellos á x como una cantidad constante, y por consiguiente se les debe tratar como funciones de la sola variable u. Segun esto, z ó $f.(x,u)$ por el incremento h de la variable u se convertirá en

$$z+\frac{dz}{du}\times\frac{h}{1}+\frac{d^2z}{du^2}\times\frac{h^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{du^3}\times\frac{h^3}{1\times2\times3}+\&c.$$

Ahora, $\frac{dz}{dx}$ que es una nueva funcion $f'.(x,u)$, considerando que en ella varía solo la u, á la qual le sobrevenga el incremento h, tendrá [535] esta forma $\frac{dz}{dx}+\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{du}\times\frac{h}{1}+\frac{d^2\left(\frac{dz}{dx}\right)}{du^2}\times\frac{h^2}{1\times2}+\frac{d^3\left(\frac{dz}{dx}\right)}{du^3}\times\frac{h^3}{1\times2\times3}+\&c.$

Pero la expresion $\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{du}$ indica dos diferenciaciones hechas sucesivamente sobre la funcion propuesta, la primera atendiendo solo á la variabilidad de x, y la segunda no considerando sino la de u; esta expresion se indica con mas sencillez del modo siguiente $\frac{d^2z}{dudx}$, y del mismo modo se representa $\frac{d^2\left(\frac{dz}{dx}\right)}{du^2}$ por $\frac{d^3z}{du^2dx}$; en general, será necesario entender por $\frac{d^{n+m}z}{du^n dx^m}$, el coeficiente diferencial del órden n relativo á la funcion $\frac{d^m z}{dx^m}$, no considerando en ella sino á u como variable, mientras esta funcion es ella misma el coeficiente diferencial del órden m de la funcion propuesta, no suponiendo sino á x variable.

Esto supuesto, la substitucion de $u+h$ en vez de u convertirá á

$$\frac{dz}{dx} \text{ en } \frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dudx} \times \frac{h}{1} + \frac{d^3z}{du^2dx} \times \frac{h^2}{1 \times 2} + \frac{d^4z}{du^3dx} \times \frac{h^3}{1 \times 2 \times 3} + \&c.$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} \text{ en } \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^3z}{dudx^2} \times \frac{h}{1} + \frac{d^4z}{du^2dx^2} \times \frac{h^2}{1 \times 2} + \frac{d^5z}{du^3dx^2} \times \frac{h^3}{1 \times 2 \times 3} + \&c.$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} \text{ en } \frac{d^3z}{dx^3} + \frac{d^4z}{dudx^3} \times \frac{h}{1} + \frac{d^5z}{du^2dx^3} \times \frac{h^2}{1 \times 2} + \frac{d^6z}{du^3dx^3} \times \frac{h^3}{1 \times 2 \times 3} + \&c.$$

&c.

Substituyendo estos valores en el desarrollo (q) de $f.(x+k,u)$, y ordenando de manera que todos los términos en que los exponentes de k y de h forman una misma suma, esten colocados en una misma columna vertical, resultará

$$\left.\begin{aligned} f.(x+k,u+h) = z &+ \frac{dz}{du} \times \frac{h}{1} + \frac{d^2z}{du^2} \times \frac{h^2}{1 \times 2} + \frac{d^3z}{du^3} \times \frac{h^3}{1 \times 2 \times 3} + \&c. \\ &+ \frac{dz}{dx} \times \frac{k}{1} + \frac{d^2z}{dudx} \times \frac{h \times k}{1 \times 1} + \frac{d^3z}{du^2dx} \times \frac{h^2}{1 \times 2} \times \frac{k}{1} + \&c. \\ &+ \frac{d^2z}{dx^2} \times \frac{k^2}{1 \times 2} + \frac{d^3z}{dudx^2} \times \frac{h}{1} \times \frac{k^2}{1 \times 2} + \&c. \\ &+ \frac{d^3z}{dx^3} \times \frac{k^3}{1 \times 2 \times 3} + \&c. \end{aligned}\right\} (r)$$

540 Hemos obtenido el dasarrollo precedente, substituyendo primero $x+k$ en vez de x, y despues $u+h$ en vez de u; pero se hubiera podido proceder en un órden inverso, y principiar por la substitucion relativa á u; entonces $f.(x,u)$ se hubiera convertido en

$$f.(x,u+h) = z + \frac{dz}{du} \times \frac{h}{1} + \frac{d^2z}{du^2} \times \frac{h^2}{1 \times 2} + \frac{d^3z}{du^3} \times \frac{h^3}{1 \times 2 \times 3} + \&c.$$

la substitucion de $x+k$ en vez de x, en esta serie, hubiera convertido á

$$z \text{ en } z + \frac{dz}{dx} \times \frac{k}{1} + \frac{d^2z}{dx^2} \times \frac{k^2}{1 \times 2} + \frac{d^3z}{dx^3} \times \frac{k^3}{1 \times 2 \times 3} + \&c.$$

$$\frac{dz}{du} \text{ en } \frac{dz}{du} + \frac{d^2z}{dxdu} \times \frac{k}{1} + \frac{d^3z}{dx^2du} \times \frac{k^2}{1 \times 2} + \frac{d^4z}{dx^3du} \times \frac{k^3}{1 \times 2 \times 3} + \&c.$$

$$\frac{d^2z}{du^2} \text{ en } \frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^3z}{dxdu^2} \times \frac{k}{1} + \frac{d^4z}{dx^2du^2} \times \frac{k^2}{1 \times 2} + \frac{d^5z}{dx^3du^2} \times \frac{k^3}{1 \times 2 \times 3} + \&c.$$

$$\frac{d^3z}{du^3} \text{ en } \frac{d^3z}{du^3} + \frac{d^4z}{dxdu^3} \times \frac{k}{1} + \frac{d^5z}{dx^2du^3} \times \frac{k^2}{1 \times 2} + \frac{d^6z}{dx^3du^3} \times \frac{k^3}{1 \times 2 \times 3} + \&c.$$

&c.

y se hubiera obtenido por consiguiente

$$\left.\begin{aligned} f.(x+k,u+h)=z+&\frac{dz}{dx}\times\frac{k}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\&c.\\ +&\frac{dz}{du}\times\frac{h}{1}+\frac{d^2z}{dxdu}.\frac{k}{1}.\frac{h}{1}+\frac{d^3z}{dx^2du}.\frac{k^2}{1\times2}.\frac{h}{1}+\&c.\\ &+\frac{d^2z}{du^2}\times\frac{h^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{dxdu^2}.\frac{k}{1}.\frac{h^2}{1\times2}+\&c.\\ &+\frac{d^3z}{du^3}\times\frac{h^3}{1\times2\times3}+\&c.\end{aligned}\right\}(s)$$

Y como es indiferente el mudar primero á x en $x+k$, y despues á u en $u+h$, ó executar las substituciones en un órden inverso, puesto que de ambos modos se obtiene igualmente $f.(x+k,u+h)$, resulta que este desarrollo debe ser idéntico con el primero. De donde se deduce comparando en estos desarrollos los coeficientes de los términos homólogos

$$\frac{d^2z}{dudx}=\frac{d^2z}{dxdu},\ \frac{d^3z}{dudx^2}=\frac{d^3z}{dx^2du},\ldots\frac{d^{n+m}z}{du^ndx^m}=\frac{d^{n+m}z}{dx^mdu^n},\&c.=\&c.$$

541 La primera equacion nos enseña que el coeficiente diferencial de segundo órden de una funcion de dos variables, tomado primero con relacion á una de ellas, y despues con relacion á la otra, queda el mismo, qualquiera que sea el órden que se haya seguido en las diferenciaciones. Para comprobarlo elegiremos la equacion $z=x^mu^n$; si se diferencia primero considerando á x sola como variable, se tiene $\frac{dz}{dx}=mx^{m-1}u^n$; diferenciando despues este resultado, no haciendo variar sino á u, se tiene $\frac{dz}{dudx}=mnx^{m-1}u^{n-1}$;

operando en un órden inverso, se halla

$$\frac{dz}{du}=nx^mu^{n-1},\ \frac{d^2z}{dxdu}=mnx^{m-1}u^{n-1},$$

donde se ve que estos dos resultados son iguales.

Si de la equacion (s) restamos la primitiva $z=f.(x,u)$, y substituimos Δu en vez de h, y Δx en vez de k, resultará

$$\begin{aligned} f.(x+k,u+h)-f.(x,u)=\Delta.f.(x,u)= &\frac{dz}{dx}\times\Delta x+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{\Delta x^2}{1\times2}+\&c.\\ +&\frac{dz}{du}\times\Delta u+\frac{d^2z}{dudx}\times\frac{\Delta x\times\Delta u}{1\times1}+\&c.\\ &+\frac{d^2z}{du^2}\times\frac{\Delta u^2}{1\times2}+\&c.\end{aligned}$$

ahora, si suponemos que x solo varie, será $\Delta u = 0$, y la diferencia parcial de la funcion con relacion á x, será

$$\frac{\Delta.f.(x.u)}{\Delta x} \times \Delta x = \frac{dz}{dx} \times \Delta x + \frac{d^2z}{dx^2} \times \frac{\Delta x^2}{1 \times 2} + \&c.,$$

que hallando la relacion, y pasando á los límites se tendrá

$$\frac{\frac{d.f.(x,u)}{dx} \times dx}{dx} = \frac{dz}{dx} \text{ ó } \frac{d.f.(x,u)}{dx} \times dx = \frac{dz}{dx} \times dx,$$

que expresa la diferencial parcial de la funcion con relacion á x; del mismo modo hallaríamos que la diferencial parcial de dicha funcion con relacion á u, seria $\frac{dz}{du} \times du$;

de donde se deduce que la diferencial total de dicha funcion será

$$d.f.(x,u) = dz = \frac{dz}{dx} \times dx + \frac{dz}{du} \times du.$$

Si hacemos $\frac{dz}{dx} = M$, y $\frac{dz}{du} = N$, se tendrá $dz = Mdx + Ndu$;

y si diferenciamos la primera de las equaciones anteriores con relacion á u, y la segunda con relacion á x, será $\frac{d^2z}{dxdu} = \frac{dM}{du}$ y $\frac{d^2z}{dudx} = \frac{dN}{dx}$;

y como $\frac{d^2z}{dxdu} = \frac{d^2z}{dudx}$, se tendrá $\frac{dM}{du} = \frac{dN}{dx}$,

cuya equacion nos expresa la condicion que se debe verificar paraque una expresion de la forma $Mdx + Ndu$ sea la diferencial exâcta de una funcion primitiva, y es *que el coeficiente diferencial de* M *relativo á* u *debe ser igual con el coeficiente diferencial de* N *relativo á* x.

542 Quando se trata de desenvolver en serie una funcion de dos ó mas variables, se suele executar solo con relacion á una de ellas, suponiendo á la otra ó á las otras un valor constante; y entonces se desenvuelven como las funciones de una sola variable por el teorema de Taylor (n). Pero no obstante deduciremos la fórmula para desenvolver en serie una funcion de dos variables.

Para esto, si suponemos $x = 0, u = 0$ en la fórmula (r), es decir, en z y en cada uno de sus coeficientes diferenciales, entonces esta equacion expresará el desarrollo de $f.(k,h)$ ordenado segun las potencias de k y de h; pero como k y h pueden tener los valores que se quieran, resulta que poniendo x en vez de k y u en vez de h se tendrá

$$f.(x,u)=z+\frac{1}{1}\left(\frac{dz}{dx}\times x+\frac{dz}{du}\times u\right)+\frac{1}{1\times 2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\times x^2+2\frac{d^2z}{dxdu}\times ux+\frac{d^2z}{du^2}\times u^2\right)+$$

$$\frac{1}{1\times 2\times 3}\left(\frac{d3z}{dx3}\times x3+3\frac{d3z}{dudx^2}\times ux^2+3\frac{d3z}{du^2dx}\times u^2x+\frac{d3z}{du3}\times u3\right)+\&c.$$

Observando que se deben hacer x y u iguales con o, tanto en z como en las expresiones que se obtengan para cada uno de los coeficientes diferenciales.

El desarrollo de $z=f.(x,u)$ se podria tambien obtener por medió de la diferenciacion análogamente á lo expuesto [533]; porque si se supone que z sea susceptible de esta forma

$$z=A+Bx+Cu+Dx^2+Exu+Fu^2+\&c.$$

donde $A,B,C,$&c. representen cantidades independientes de x y u, diferenciando sucesivamente tendremos $\frac{dz}{dx}=B+2Dx+Eu+\&c.$

que suponiendo $x=0$ y $u=0$ da, acentuando las variables paraque se distingan en este supuesto particular, $B=\frac{dz'}{dx'}$;

$\frac{dz}{du}=C+Ex+2Fu+\&c.$ que suponiendo $x=0$ y $u=0$ da $\frac{dz'}{du'}=C$;

$\frac{d^2z}{dx^2}=2D+\&c.$ que suponiendo $x=0$ y $u=0$ da $D=\frac{1}{2}\times\frac{d^2z'}{dx'^2}$;

$\frac{d^2z}{dudx}=E+\&c.$ que da en el mismo supuesto $E=\frac{d^2z'}{dx'du'}$;

$\frac{d^2z}{du^2}=2F+\&c.$ que da en el mismo supuesto $F=\frac{1}{2}\times\frac{d^2z'}{du'^2}$;

&c.

por lo que haciendo las substituciones correspondientes será

$$z=f.(x',u')+\frac{dz'}{dx'}\times\frac{x}{1}+\frac{dz'}{du'}\times\frac{u}{1}+\frac{d^2z'}{dx'^2}\times\frac{x^2}{1\times 2}+\frac{d^2z'}{dx'du'}\times\frac{xu}{1\times 1}+\frac{d^2z'}{du'^2}\times\frac{u^2}{1\times 2}\&c.=$$

$$f.(x',u')+\frac{1}{1}\left(\frac{dz'}{dx'}\times x+\frac{dz'}{du'}\times u\right)+\frac{1}{1\times 2}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\times x^2+2\frac{d^2z'}{dx'du'}\times ux+\frac{d^2z'}{du'^2}\times u^2\right)+\&c.$$

que es el mismo resultado que antes, puesto que alli decíamos que en $z,\frac{dz}{dx}$, &c. se debian hacer $x=0,u=0$, y aqui expresamos esta circunstancia con los acentos.

De la diferenciacion de las funciones trascendentes.

543 La funcion mas simple de las trascendentes es $z=a^x$. Quando se substituye en ella $x+\Delta x$ en vez de x, se tendrá $z'=a^{x+\Delta x}$, y restando de esta equacion la primitiva, y señalando con Δz á la diferencia $z'-z$ será $\Delta z=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x\times a^{\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$.

Aqui tenemos necesidad de desenvolver en serie la funcion $a^{\Delta x}$, para lo qual debemos averiguar si hay algun medio de executar esto que sea independiente de la teoría de las series; y en efecto, hallamos que si en vez de a se substituye un binomio qualquiera, por exemplo $b+c$, la podríamos desenvolver por el binomio de Neuton que hemos demostrado ya por el cálculo diferencial, sin fundarnos en la teoría de las series; y tendremos $(b+c)^{\Delta x}=b^{\Delta x}+\Delta x\times b^{\Delta x-1}c+\&c.$
pero como aqui lo que necesitamos es que Δx no se halle por exponente para impedir que sea trascendente la expresion, advertimos que haciendo la primera parte b del binomio igual con 1, entonces desaparecerían los exponentes de b; porque qualquier potencia de la unidad es la misma unidad, y por consiguiente no se hallaria Δx por exponente; luego haciendo $a=1+c$ tendremos

$$a^{\Delta x}=(1+c)^{\Delta x}=1+\frac{\Delta x}{1}\times c+\frac{\Delta x(\Delta x-1)}{1\times 2}\times c^2+\frac{\Delta x(\Delta x-1)(\Delta x-2)}{1\times 2\times 3}c^3+\&c.$$

de donde $a^{\Delta x}-1=\frac{\Delta x}{1}\times c+\frac{\Delta x(\Delta x-1)}{1\times 2}\times c^2+\frac{\Delta x(\Delta x-1)(\Delta x-2)}{1\times 2\times 3}c^3+\&c.$

que ordenando con relacion á Δx se convierte en

$$a^{\Delta x}-1=\Delta x\left(\frac{c}{1}-\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{3}\&c.\right)+\&c.$$

poniendo por c su valor $a-1$ resultará

$$a^{\Delta x}-1=\Delta x\left(\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\&c.\right)+\&c.$$

y substituyendo este valor en el de Δz, se tendrá

$$\Delta z=\Delta . a^x=a^x\left(\Delta x\left[\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\&c\right]+\Delta x^2(\&c.)\right),$$

y hallando la relacion será

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=a^x\left(\left[\frac{(a-1)}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\&c.\right]+\Delta x(\&c.)\right),$$

y pasando á los límites $\frac{dz}{dx}=a^x\left(\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\&c.\right),$

ó llamando k á la cantidad constante $\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-$&c
será por último $dz=d.a^x=ka^xdx$.

Esta es la forma de la diferencial de la funcion propuesta, y encontraremos bien pronto una nueva expresion del número constante k que será la misma que hallámos por las series.

544 Si continuamos diferenciando considerando constante á dx, será
$d^2z=d^2.a^x=d.d.a^x=d.ka^xdx=kdxd.a^x=kdx\times ka^xdx=k^2a^xdx^2$;
y del mismo modo hallaríamos que $d^3z=d^3.a^x=k^3a^xdx^3$;
y que $d^nz=d^n.a^x=k^na^xdx^n$,
de donde se sigue que $\frac{dz}{dx}=ka^x$, $\frac{d^2z}{dx^2}=k^2a^x$, $\frac{d^3z}{dx^3}=k^3a^x \ldots \frac{d^nz}{dx^n}=k^na^x$;
y como haciendo $x=0$, la funcion y sus coeficientes diferenciales, se convierten en $A=1$, $A'=k$, $A''=k^2$, $A'''=k^3$, &c.
tendremos [§533] $a^x=1+\frac{k}{1}x+\frac{k^2}{1\times2}x^2+\frac{k^3}{1\times2\times3}x^3+$&c.

Donde se ve que hemos llegado al desarrollo de la funcion a^x, el qual nos servirá para conocer de qué cantidad saca su orígen la cantidad representada por k.

Si se supone $x=1$ resultará $a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\times2}+\frac{k^3}{1\times2\times3}+$&c.

Esta equacion no siendo á propósito para hacer conocer a por medio de k, sino quando esta cantidad sea pequeña, buscaremos el valor que debe tener a quando $k=1$, y designándole por e será

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\&c.$$

Continuando esta serie y valuando los términos en decimales, se hallará $e=2,71828\ 18284\ 59045\ 23536$ &c.

Esto supuesto, pues que este valor corresponde á $k=1$,
se sigue que $e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\times2}+\frac{x^3}{1\times2\times3}+$&c.
y que igualmente $e^k=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\times2}+\frac{k^3}{1\times2\times3}+$&c.
luego se tendrá por consiguiente $e^k=a$. Luego si por una y otra parte se toman los logaritmos, se obtendrá $kle=la$ ó $k=\frac{la}{le}$;
y por consiguiente $d.a^x=ka^xdx=\frac{la}{le}a^xdx$;

y si consideramos que estos logaritmos se toman en el sistema cuya base sea a que dará $la=1$, se tendrá $k=\frac{1}{le}$, y $d.a^x=\frac{1}{le}a^xdx$.

Si tomásemos los logaritmos en el sistema cuya base fuese e, seria $le=1$, y se tendria $d.a^x=a^xdx\times la$.

545 Ahora podemos llegar á obtener la diferencial de toda funcion logarítmica. En efecto, si se llama a la base del sistema, z el número, y x el logaritmo, se tendrá la equacion $z=a^x$;
considerando á x como una funcion de z, y tomando las diferenciales de cada miembro, se encontrará $dz=ka^xdx=kzdx$,
de donde se sacará $dx=\frac{dz}{a^xk}$,
ó poniendo en vez de x su expresion lz, en vez de a^x su valor z, y en vez de k su valor $\frac{1}{le}$, pues que a es la base del sistema de los logaritmos propuestos, se tendrá $d.lz=le\frac{dz}{z}$.

El número e se presenta con mucha freqüencia en las investigaciones analíticas; se le toma por base de un sistema de logaritmos, á que se da el nombre de *neperiano* del nombre de Neper su inventor, y le substituiremos al nombre con que es conocido vulgarmente de *hiperbólico* ó *natural*. Estos logaritmos se suelen señalar con la característica l', y tendremos $l'e=1$, de donde resulta $d.a^x=a^xdx.l'a$ y $dl'z=\frac{dz}{z}$.

Si queremos comparar los logaritmos de un mismo número z en dos distintos sistemas, el uno por exemplo, cuya base sea e que denotaremos con la característica l', y el otro cuya base sea a,
se tendrá $z=e^{l'z}$ y $z=a^{lz}$, de donde $a^{lz}=e^{l'z}$,
y tomando los logaritmos de ambos miembros en el sistema cuya base sea a, se tendrá $l.a^{lz}=l.e^{l'z}$ ó $l.zla=l'.zle$ ó por ser $la=1$ será $lz=l'.zle$;
y como se comparan todos los sistemas de logaritmos con el de Neper, se llama *módulo* al número le, por el qual es necesario multiplicar un logaritmo neperiano para pasar al logaritmo en otro sistema, y señalándole por M se tiene $lz=M\times l'z$ y $d.lz=M\times\frac{dz}{z}$.

Luego para determinar el módulo correspondiente á un sistema qualquiera no hay mas que hallar el logaritmo de $e=2,7182818$ &c.
en dicho sistema; y como el logaritmo de este número en el sistema tabular cuya base es 10, está representado por 0,4342948 &c.
resulta que este es el módulo del sistema tabular.

La diferencial logarítmica siendo de un grande uso, es necesario tra-

ducirla en regla; y así diremos *que la diferencial del logaritmo de un número es igual al producto del módulo por el quociente de la diferencial del número partida por el mismo número*; y si es en el sistema de Neper, *la diferencial del logaritmo de un número es igual á la diferencial del número partida por el mismo número.*

546 Si se quisiese pasar de aqui al desarrollo de x en z, ó del logaritmo en potencias del número, se hallaria que las cantidades

$$x, \frac{dx}{dz}, \frac{d^2x}{dz^2}, \text{\&c. eran infinitas en el supuesto de } z=a^x=0,$$

y se concluiria que siendo z el número no se podria desenvolver x en una serie de esta forma $x=A+Bz+Cz^2+Dz^3+\&c.$

No sucederia lo mismo, si en vez de representar el número por z, le representáramos por un binomio $1+u$; porque entonces seria $1+u=a^x$ que en el sistema cuya base es a, da $x=l(1+u)$, y diferenciando será

$$\frac{dx}{du}=M\times\frac{1}{1+u}, \frac{d^2x}{du^2}=-M\times\frac{1}{(1+u)^2}, \frac{d^3x}{du^3}=M\times\frac{2}{(1+u)^3}, \&c.$$

que haciendo $u=0$, substituyendo los valores que resulten en la expresion del artículo [533], y sacando fuera de un paréntesis el factor comun M, se tendrá $l(1+u)=M\left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\&c.\right)$

y suponiendo $M=1$, se tendrá el $l'(1+u)$ de $1+u$ en el sistema neperiano que será $l'(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\&c.$

547 Vamos á manifestar algunos exemplos de la aplicacion de las reglas de la diferenciacion de las funciones logarítmicas; y para mayor sencillez supondremos de aqui en adelante que los logaritmos son neperianos, á menos que no se advierta lo contrario, y los señalaremos simplemente con la l.

Sea 1.º $z=l\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$, haciendo $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=u$ será $dz=d.lu=\frac{du}{u}$;

$$\text{pero } du=\frac{dx\sqrt{a^2+x^2}-\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2+x^2}=\frac{dx(a^2+x^2)-x^2dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{a^2dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$$

luego $dz=\frac{du}{u}=\frac{\frac{a^2dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}}{\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}=\frac{a^2dx\sqrt{a^2+x^2}}{x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{a^2dx}{x(a^2+x^2)}$.

2.° $z=l\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$, haremos $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=t$, $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=u$,

y tendremos $z=l\frac{t}{u}=lt-lu$, $dz=d.lt-d.lu=\frac{dt}{t}-\frac{du}{u}$;

pero $dt=\frac{dx}{2\sqrt{1+x}}-\frac{dx}{2\sqrt{1-x}}$,

que reduciendo á un comun denominador, resolviendo en factores, y poniendo $-u$ en vez de su igual $\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}$, se convierte en

$$dt=\frac{dx\sqrt{1-x}-dx\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}=\frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)=\frac{-udx}{2\sqrt{1-x^2}};$$

$$du=\frac{dx}{2\sqrt{1+x}}-\frac{-dx}{2\sqrt{1-x}}=\frac{dx\sqrt{1-x}+dx\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}=\ldots.$$

$$\frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})=\frac{tdx}{2\sqrt{1-x^2}};$$

de donde resultará $dz=\frac{dt}{t}-\frac{du}{u}=\frac{\frac{-udx}{2\sqrt{1-x^2}}}{t}-\frac{\frac{tdx}{2\sqrt{1-x^2}}}{u}=\ldots$

$$-\frac{udx}{2t\sqrt{1-x^2}}-\frac{tdx}{2u\sqrt{1-x^2}}=\frac{-u^2dx-t^2dx}{2tu\sqrt{1-x^2}}=\frac{-(t^2+u^2)dx}{2tu\sqrt{1-x^2}};$$

y observando que $t^2+u^2=4$, y que $tu=2x$, se hallará por último

$$dz=-\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Este exemplo es notable por las reducciones de que es susceptible su diferencial, y por su sencillez con relacion á la funcion de donde se deriva; ahora será fácil el cálculo de los exemplos siguientes, de que no daremos sino el resultado

Si fuese $z = l(x+\sqrt{1+x^2})$ resultará $dz = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

$z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l(x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2})$ . . . . $dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

$z = l\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)^{\frac{1}{2}}$ . . . . $dz = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Si se tubiese $z = (lx)^n$, haciendo $lx = u$ se hallaria

$$du = \frac{dx}{x},\ (lx)^n = u^n,\ d.u^n = nu^{n-1}du,$$

y substituyendo en vez de u y du sus valores, resultaria

$$dz = d.(lx)^n = n(lx)^{n-1}\frac{dx}{x}.$$

Sea enfin $z = l.lx$, es decir, el logaritmo del logaritmo de x; haciendo como antes $lx = u$, será $z = lu, dz = \frac{du}{u}$;

y como $du = d.lx = \frac{dx}{x}$ resultaria $dz = \frac{dx}{xlx}$.

548 La consideracion de los logaritmos facilita mucho la diferenciacion de las funciones exponenciales quando son complicadas.

1.° Sea por exemplo $z = u^t$, siendo t y u dos funciones qualesquiera de x; tomando el logaritmo de cada miembro se tendrá $lz = tlu$,

y diferenciando despues será $\frac{dz}{z} = t\frac{du}{u} + ludt$,

de donde $dz = z\left(t\frac{du}{u} + ludt\right)$ ó $d.u^t = u^t\left(t\frac{du}{u} + ludt\right)$.

2.° Sea $z = a^{b^x}$; haciendo $b^x = t$, se tendrá $z = a^t$;

y por lo expuesto [§ 544] será $dz = a^t dt.la$;

y como $dt = d.b^x = b^x dx.lb$ resulta $dz = a^{b^x} b^x dxlalb$.

3.° Sea $z = u^{t^s}$, siendo u,t,s funciones de x; haciendo $t^s = r$,

resultará $z = u^r, dz = u^r\left(r\frac{du}{u} + ludr\right)$;

y como $dr = t^s\left(s\frac{dt}{t} + ltds\right)$,

resultará $dz = u^r \left(t^s \frac{du}{u} + lu.t^s \left(s \frac{dt}{t} + ltds \right) \right) = \ldots$

$u^r t^s \left(\frac{du}{u} + lu \frac{sdt}{t} + lultds \right) = u^{t^s} t^s \left(\frac{du}{u} + lu \frac{sdt}{t} + lultds \right)$;

por medio de estas fórmulas se hallará fácilmente la diferencial de una funcion exponencial qualquiera.

349 Los senos, cosenos, tangentes, y las otras lineas trigonométricas consideradas con relacion al arco de círculo de que dependen, son tambien funciones trascendentes, y se les llama con freqüencia *funciones circulares*. Supondremos para mayor sencillez que el radio sea igual con la unidad, y que se tenga primero $z = \text{sen}.x$, y tendremos substituyendo $x + \Delta x$ en vez de x,

$z' = \text{sen}.(x + \Delta x) =$ [I. 642] $\text{sen}.x \cos.\Delta x + \text{sen}.\Delta x \cos.x$,

de donde se saca para la diferencia

$z' - z = \Delta z = \Delta.\ \text{sen}.x = \text{sen}.x \cos.\Delta x + \text{sen}.\Delta x \cos.x - \text{sen}.x = \ldots$

$\text{sen}.x\ (\cos.\Delta x - 1) + \cos.x\ \text{sen}.\Delta x$.

Ahora sería necesario desenvolver en serie ordenada por las potencias del incremento Δx, el último miembro de esta equacion: pero sin esto se puede llegar al límite de la relacion del incremento de la funcion con el de la variable del modo siguiente. Tomando dicha relacion

será $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \text{sen}.\ x \frac{\cos.\Delta x - 1}{\Delta x} + \cos.\ x \frac{\text{sen}.\ \Delta x}{\Delta x} = \ldots$

$- \text{sen}.\ x \frac{1 - \cos.\ \Delta x}{\Delta x} + \cos.\ x. \frac{\text{sen}.\ \Delta x}{\Delta x}$;

y si se atiende á que

$(\text{sen}.\Delta x)^2 =$ [I. 633] $1 - (\cos.\Delta x)^2 =$ [I. 179] $(1 + \cos.\Delta x)(1 - \cos.\Delta x)$,

y sacamos de aqui el valor de $1 - \cos.\ \Delta x$, será $1 - \cos.\ \Delta x = \frac{(\text{sen}.\ \Delta x)^2}{1 + \cos.\ \Delta x}$;

luego substituyendo arriba este valor se tendrá

$\frac{\Delta z}{\Delta x} = - \frac{\text{sen}.\ x}{\Delta x} \times \frac{(\text{sen}.\ \Delta x)^2}{1 + \cos.\ \Delta x} + \cos.\ x \times \frac{\text{sen}.\ \Delta x}{\Delta x} = \ldots$

$\left(- \text{sen}.\ x \times \frac{\text{sen}.\ \Delta x}{1 + \cos.\Delta x} + \cos.\ x \right) \frac{\text{sen}.\ \Delta x}{\Delta x}$;

y para pasar á los límites buscaremos en lo que se convierten los dos factores del segundo miembro quando el incremento Δx se desvanece.

En este caso $\text{sen}.\ \Delta x = 0$, $\cos.\ \Delta x = 1$, y el primer factor se reduce á $\cos.\ x$.

El factor $\frac{\text{sen. } \Delta x}{\Delta x}$ se acerca sin cesar hácia la unidad; porque de $\text{tang. } A = \frac{\text{sen.} A}{\text{cos.} A}$ se deduce $\frac{\text{sen. } A}{\text{tang. } A} = \text{cos. } A$;

y pues que cos. $A = 1$ quando $A = 0$, la unidad será el límite de la relacion entre el seno y la tangente quando el arco se desvanece; pero siendo el arco menor que la tangente y mayor que el seno, se siguè que con mayor razon su relacion con el seno se acerca sin cesar á la unidad. Luego se tendrá en virtud de todo esto

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d.\text{ sen. } x}{dx} = \text{cos.} x \text{ ó } dz = d.\text{ sen.} x = \text{cos.} x.\ dx.$$

Obtenida ya la diferencial del seno las otras se deducen de ella con facilidad; porque se tiene

1.º $\text{cos. } x = \text{sen. } (\frac{1}{2}\pi - x)$, $d.\text{ cos. } x = d.\text{ sen. } (\frac{1}{2}\pi - x)$;

y como por lo que precede

$d.\text{ sen. } (\frac{1}{2}\pi - x) = d.(\frac{1}{2}\pi - x) \text{ cos.}(\frac{1}{2}\pi - x) = -dx.\text{cos. } (\frac{1}{2}\pi - x)$,

y $\text{cos.}(\frac{1}{2}\pi - x) = \text{sen.} x$, será $d.\text{ cos.} x = -dx \text{ sen.} x$.

2.º Pues que $\text{sen. vers.} x = 1 - \text{cos.} x$,

se tendrá $d.\text{ sen. vers. } x = -d.\text{ cos.} x = dx.\text{ sen.} x$.

3.º Siendo $\text{tang. } x = \frac{\text{sen.} x}{\text{cos.} x}$, tendremos

$$d.\text{ tang. } x = \frac{\text{cos. } x\ d.\text{ sen. } x - \text{sen. } x\ d.\text{ cos. } x}{\text{cos. }^2 x} = \ldots$$

$$\frac{\text{cos. } x\, dx \text{ cos. } x - \text{sen. } x \times - dx \text{ sen. } x}{\text{cos. }^2 x} = \frac{\text{cos.}^2 x dx + \text{sen.}^2 x dx}{\text{cos. }^2 x} = \ldots$$

$$\frac{(\text{cos.}^2 x + \text{sen.}^2 x) dx}{\text{cos. }^2 x} = \frac{dx}{\text{cos }^2 x}.$$

4.º Como $\text{cot.} x = \frac{1}{\text{tang.} x}$, será $d.\text{cot.} x = -\frac{d.\text{tang.} x}{\text{tang.}^2 x} = \frac{-\frac{dx}{\text{cos.}^2 x}}{\text{tang.}^2 x} = \ldots$

$$-\frac{dx}{\text{cos. }^2 x \text{ tang.}^2 x} = -\frac{dx}{\text{cos. }^2 x \frac{\text{sen. }^2 x}{\text{cos. }^2 x}} = -\frac{dx}{\text{sen.}^2 x}.$$

5.º Siendo $\text{sec. } x = \frac{1}{\text{cos. } x}$ tendremos

$$d.\text{ sec } x = -\frac{d.\text{cos.} x}{\text{cos.}^2 x} = \frac{\text{sen.} x dx}{\text{cos.}^2 x} = \frac{1}{\text{cos.} x} \times \frac{\text{sen.} x}{\text{cos.} x} \times dx = dx \text{ tang.} x.\text{sec.} x;$$

porque $\frac{\text{sen.} x}{\text{cos.} x} = \text{tang.} x$, y $\frac{1}{\text{cos.} x} = \text{sec.} x$.

$6.°$ Cosec.$x = \dfrac{1}{\text{sen.}x}$,

$$d.\text{cosec. } x = -\frac{\cos.x dx}{\text{sen.}^2 x} = -dx\,\frac{\cos.x}{\text{sen.}x} \times \frac{1}{\text{sen.}x} = -dx.\cot.x\,\text{cosec.}x.$$

Con estas fórmulas se puede encontrar la diferencial de toda expresion que contenga senos, cosenos, tangentes, &c; para lo que será necesario diferenciarlas á estas cantidades como funciones particulares, y poner en vez de sus diferenciales los resultados de antes: sea por exemplo $z = \cos.x^{\,\text{sen.}x}$; haciendo $\cos.x = u$, $\text{sen.}x = t$ se tendrá $z = u^t$, y

$$dz = d.u^t = u^t\left(dtlu + \frac{tdu}{u}\right) = \cos.x^{\,\text{sen.}x}\left(\cos.xl\cos.x - \frac{\text{sen.}^2 x}{\cos.x}\right)dx.$$

En todo lo que hemos expuesto, hemos hecho uso de las substituciones para diferenciar las expresiones complicadas; porque esto auxîlia mucho al principiante. Pero entendido ya el artificio que se observa en las substituciones, conviene ponerse diestros en aplicar las reglas directamente aun á los exemplos mas complicados; y tal vez no se puede concebir el incremento que toman las fuerzas intelectuales de los principiantes quando se les exercita convenientemente en esto.

55. Hasta aqui solo hemos considerado á los senos, cosenos, &c. como funciones del arco; consideremos ahora al arco sucesivamente como una funcion de su seno, de su coseno, &c. y busquemos su diferencial baxo este punto de vista. Para esto supongamos que x sea la funcion propuesta, y z sea la variable de que depende esta funcion; $1.°$ la equacion

$d.\text{sen.}x = dx \cos.x$ á causa de $\text{sen.}x = z$, y $\cos.x = \sqrt{1-z^2}$,

da $dz = dx\sqrt{1-z^2}$, y por consiguiente $dx = \dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$,

este es el valor de la diferencial del arco expresada por el seno y por su diferencial.

Si sen. x lo representásemos por $\dfrac{u}{a}$, substituiríamos este valor en vez de z en la expresion anterior, y resultaria

$$dx = \frac{d.\frac{u}{a}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}}} = \frac{\frac{du}{a}}{\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a}} = \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}.$$

Si quisiésemos expresar la diferencial del arco por su coseno, seria necesario partir de la equacion $d.\cos.x = -dx\ \text{sen.}x$,

lo que haciendo $\cos.x=z$ da $dx=-\frac{dz}{\text{sen}.x}=-\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$.

Para pasar de aqui al seno verso se haria $t=\text{sen. vers}.x$, y la equacion $d.\text{sen. vers}.x=dx\ \text{sen}.x$ dará

$dt=dx\times\sqrt{(2-t)t}=dx\sqrt{2t-t^2}$, por lo qual $dx=\frac{dt}{\sqrt{2t-t^2}}$.

2.º Sea $\text{tang}.x=z$; la equacion $d.\ \text{tang}.x=\frac{dx}{\cos.^2x}$

da $dz=\frac{dx}{\cos.^2x}$, y $dx=dz.\cos.^2x$.

A causa de $\text{tang}.x=\frac{\text{sen}.x}{\cos.x}$,

se encuentra $\text{sen}.x=\cos.x\ \text{tang}.x$, $\text{sen}.^2x=\text{tang}.^2x\cos.^2x$, y substituyendo $1-\cos.^2x$ en vez de $\text{sen}.^2x$, resulta

$$1=\cos.^2x+\text{tang}.^2x\cos.^2x=\cos.^2x(1+\text{tang}.^2x);$$

luego se tiene $\cos.^2x=\frac{1}{1+\text{tang}.^2x}=\frac{1}{1+z^2}$;

poniendo este valor en el de dx, resultará $dx=\frac{dz}{1+z^2}$, de donde se puede concluir que *la diferencial del arco es igual á la diferencial de la tangente dividida por el quadrado de la secante*; porque $\sqrt{1+z^2}$ expresa la secante quando z representa la tangente.

Terminaremos este artículo por el exemplo siguiente:

Sea x un arco que tenga por seno la funcion $2z\sqrt{1-z^2}$; haciendo $2z\sqrt{1-z^2}=t$ se tendrá $dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$;

pero $dt=\frac{2dz(1-2z^2)}{\sqrt{1-z^2}}$, y $\sqrt{1-t^2}=1-2z^2$, luego $dx=\frac{2dz}{\sqrt{1-z^2}}$.

551 Por medio de las expresiones diferenciales que acabamos de obtener, se pueden formar los desarrollos de las principales funciones circulares.

Para $z=\text{sen}.x$ se tiene

$\frac{dz}{dx}=\cos.x$, $\frac{d^2z}{dx^2}=-\text{sen}.x$, $\frac{d^3z}{dx^3}=-\cos.x$, $\frac{d^4z}{dx^4}=\text{sen}.x$, &c.

que haciendo $x=0$ será $A=0, A'=1, A''=0, A'''=-1, A^{IV}=0, A^{V}=1$,

de donde se concluirá [§533] $z=\text{sen}.x=x-\dfrac{x^3}{1\times2\times3}+\dfrac{x^5}{1\times2\times3\times4\times5}-$ &c.,
que es la misma que hallámos por las series.

Para $z=\cos.x$ hallaremos

$$\frac{dz}{dx}=-\text{sen}.x,\ \frac{d^2z}{dx^2}=-\cos.x,\ \frac{d^3z}{dx^3}=\text{sen}.x,\ \frac{d^4z}{dx^4}=\cos.x,\ \frac{d^5z}{dx^5}=-\text{sen}.x, \&.$$

que haciendo $x=0$, se tendrá

$$A=1,\ A'=0,\ A''=-1,\ A'''=0,\ A^{IV}=1,\ A^{V}=0,\ \&c.$$

lo que dará $z=\cos.x=1-\dfrac{x^2}{1\times2}+\dfrac{x^4}{1\times2\times3\times4}-\dfrac{x^6}{1\times2\times3\times4\times5\times6}+$ &c.

Tambien podríamos hallar fórmulas para las demas lineas trigonométricas; pero no nos detendremos en esto, pues hallaríamos los mismos resultados que obtuvimos por las series.

552 Si se representa por t un arco de círculo cuyo seno sea x, se tendrá $dt=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

lo que nos conducirá al desarrollo del arco segun las potencias del seno.

En efecto, de esta equacion se sacará

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ \frac{d^2t}{dx^2}=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}};\ \frac{d^3t}{dx^3}=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}};$$

$$\frac{d^4t}{dx^4}=\frac{3\times3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3\times5x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}};\ \frac{d^5t}{dx^5}=\frac{3\times3}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{2\times5\times9x^2}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}+\frac{3\times5\times7x^4}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}};\&c.$$

de donde resulta, haciendo $x=0$, que como en este caso tambien es $t=0$, se tendrá $A=0$, $A'=1$, $A''=0$, $A'''=1$, $A^{IV}=0$, $A^{V}=3\times3$, &c.

por lo que $t=x+\dfrac{x^3}{1\times2\times3}+\dfrac{3\times3x^5}{1\times2\times3\times4\times5}+$ &c.

Como el sacar estos coeficientes diferenciales es complicado, en adelante daremos otros medios para desenvolver el arco en serie ordenada por las potencias de las demas lineas trigonométricas.

De la diferenciacion de qualesquiera equaciones de dos variables.

553 Hasta aqui no hemos diferenciado sino *equaciones separadas*, es decir, equaciones en que la variable se hallaba sola en un miembro y la funcion en el otro; tales son las equaciones de la forma $Z=X$, siendo Z una funcion de z, y X una de x; pero el mayor número de equaciones que se encuentran en las investigaciones analíticas no es baxo este as-

pecto; la variable y la funcion se hallan en ellas mezcladas ó combinadas entre sí.

Quando se tiene una equacion qualquiera $U=0$ entre x y z, su efecto es de determinar z por medio de x, ó x por medio de z, de manera que una de estas cantidades es funcion de la otra. Si concebimos que se haya determinado z por medio de x, substituyendo la expresion de z en U, esta se convertirá necesariamente en una funcion de x sola; pero compuesta de términos que se destruirán independientemente de ningun valor particular de x, pues que este valor debia permanecer indeterminado. De donde se sigue que la cantidad U se debe mirar implícitamente como una funcion de x, que es nula para todos los valores que pueda recibir esta variable, y que por consiguiente su diferencial debe ser nula tambien; luego en este caso la diferencial de z se deberá tomar considerándola como funcion de x, lo que hará que tenga esta forma $dz=Adx$;

por lo qual si se toma la diferencial de U baxo este aspecto y se la iguala con cero, se tendrá la equacion que debe determinar á A en esta hipótesis. Aclaremos esto por un exemplo.

Sea la equacion $z^2-2mxz+x^2-a^2=0$,

la cantidad expresada por U siendo aqui $z^2-2mxz+x^2-a^2$ tendremos que si en ella se substituye en vez de z su valor $mx\pm\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}$ sacado de la equacion primitiva, se convertiria en una funcion de x sola, cuyos términos todos se destruirian; así, su diferencial baxo esta forma seria igual con cero. Pero diferenciando el primer miembro en el supuesto de ser z funcion de x se tendrá $2zdz-2mxdz-2mzdx+2xdx=0$,

ó suprimiendo el factor comun 2, será

$zdz-mxdz-mzdx+xdx=0$, ó $(z-mx)dz-(mz-x)dx=0$,

y haciendo $dz=Adx$, se tendrá $zAdx-mxAdx-mzdx+xdx=0$,

ó suprimiendo el factor comun dx será $zA-mxA-mz+x=0$,

ó $A(z-mx)-mz+x=0$, que da $A=\dfrac{mz-x}{z-mx}$;

y substituyendo en este valor de A el de z

será $A=\dfrac{-x+m^2x\pm m\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}}{\pm\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}}=m+\dfrac{-x+m^2x}{\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}}$;

resultado semejante al que se deduciria inmediatamente de la equacion separada $z=mx\pm\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}$, pues sacaríamos [§525],

$$\frac{dz}{dx}=m\pm\frac{-2x+2m^2x}{\pm2\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}}=m+\frac{-x+m^2x}{\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}}.$$

Aplicando el mismo razonamiento á la equacion $(z-mx)A-mz+x=0$, considerando en ella z y A como funciones de x, resulta la equacion

$$(dz-mdx)A+(z-mx)dA-mdz+dx=0,$$

y si se hace $dz=Adx$, y $dA=Bdx$, resultará despues de dividido por dx,

$$(A-m)A+(z-mx)B-mA+1=0;$$

equacion que da la relacion que el coeficiente diferencial del segundo órden B ó $\frac{d^2z}{dx^2}$ debe tener con el de primer órden A ó $\frac{dz}{dx}$, y con las variables z y x.

Continuando diferenciando de la misma manera, se formaria la equacion de que dependiese el coeficiente diferencial de tercer orden, y así en adelante.

554 Si se atiende á que $B=\frac{d^2z}{dx^2}$, y que $d^2z=d(dz)$, se reconocerá que la equacion $(A-m)A+(z-mx)B-mA+1=0$, se deduce desde luego de la equacion $zdz-mxdz-mzdx+xdx=0$ (1), quando se la diferencia haciendo variar en ella dz como una funcion de x, y dividiendo despues por dx^2. En efecto, se tiene primeramente,

$$dz^2+zd^2z-2mdxdz-mxd^2z+dx^2=0 \ (2),$$

y dividiendo por dx^2 será $\frac{dz^2}{dx^2}-2m\frac{dz}{dx}+(z-mx)\frac{d^2z}{dx^2}+1=0$,

equacion que quando se muda en ella $\frac{dz}{dx}$ en A y $\frac{d^2z}{dx^2}$ en B, se transforma en la que hemos obtenido mas arriba para determinar B.

En general, hacer variar las cantidades $A.B.C.$ &c. como funciones de x, es tomar las diferenciales de las expresiones equivalentes $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ &c. es enfin, considerar á las cantidades dz, d^2z &c. como funciones de x.

La equacion (1) es la *diferencial primera de la propuesta; la equacion (2) es su diferencial segunda, &c. y segun la observacion hecha arriba, las diferenciales de una equacion primitiva propuesta, se deducen las unas de las otras por la diferenciacion, considerando á* z, dz, d^2z *&c. como funciones de* x.

Se pasa á las equaciones que dan los coeficientes diferenciales, observando que estos coeficientes son $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, &c.

ó haciendo $dz=Adx$, $d^2z=Bdx^2$, &c.

por estas últimas substituciones las diferenciales desaparecen, y no quedan en los resultados sino las funciones A,B,C, &c. absolutamente independientes de dx.

555 La equacion $z^2-2mxz+x^2-a^2=0$, siendo del segundo grado, da para z dos valores por medio de los quales la equacion $(z-mx)dz-(mz-x)dx=0$,

de donde se saca $\frac{dz}{dx}=\frac{mz-x}{z-mx}$,

da tambien dos valores para el coeficiente diferencial $\frac{dz}{dx}$ correspondientes á los de la funcion z.

Si en vez de resolver la equacion propuesta para sacar de ella el valor de z, se hubiese eliminado esta variable entre las dos equaciones

$$z^2-2mxz+x^2-a^2=0,\ (z-mx)\,dz-(mz-x)dx=0,$$

se hubiera tenido desde luego en virtud de la segunda $z=\frac{x(mdz-dx)}{dz-mdx}$; substituyendo este valor en la primera se convertirá despues de hechas las reducciones en

$$(x^2-a^2-m^2x^2)dz^2-(2mx^2-2a^2mx-2m^3x^2)dzdx+\ldots.$$
$$(x^2-m^2x^2-a^2m^2)dx^2=0.$$

Esta última equacion resuelta con relacion á dz daria los valores hallados antes. Tambien se podria sacar de ella inmediatamente el coeficiente diferencial, para lo qual bastaria dividirla por dx^2, y se tendria entonces

$$(x^2-a^2-m^2x^2)\frac{dz^2}{dx^2}-(2mx^2-2a^2m-2m^3x^2)\frac{dz}{dx}+x^2-m^2x^2-a^2m^2=0,$$

y quitando el coeficiente del quadrado $\frac{dz^2}{dx^2}$

será $$\frac{dz^2}{dx^2}-2m\frac{dz}{dx}+\frac{x^2-m^2x^2-a^2m^2}{x^2-a^2-m^2x^2}=0.$$

Del mismo modo se procederia en exemplos mas complicados.

556 La advertencia hecha [§ 532] acerca de las constantes que desaparecen por la diferenciacion de las funciones, se aplica igualmente á las equaciones. Si se tubiese por exemplo la equacion $z^2=ax+b$, la diferencial $2zdz=adx$, siendo independiente de b, perteneceria á cada una de las equaciones particulares que resultan de la propuesta, dando á b todos los valores posibles.

Pero tambien se puede llegar en el caso actual á una equacion independiente de a, aunque la diferenciacion no haya hecho desaparecer esta constante; para lo qual basta eliminar a entre las dos equaciones $z^2=ax+b$, $2zdz=adx$, y se encontrará $z^2dx=2xzdz+bdx$.

Aunque esta última equacion no sea la diferencial inmediata de la propuesta, se deriva sin embargo de ella; de modo que estando dividida por dx, expresa la relacion que debe exìstir entre la variable x, la funcion z y el coeficiente diferencial $\frac{dz}{dx}$, qualquiera que sea el valor de a.

557 Si la constante que se elimina se halla elevada á potencias superiores á la primera en la equacion propuesta, el resultado que se obtenga contendrá potencias de dz y de dx superiores tambien á la primera. Tomemos por exemplo $z^2-2az+x^2=a^2$, diferenciando se hallará despues de dividir por 2, $zdz-adz+xdx=0$,

de donde $a=\dfrac{zdz+xdx}{dz}$;

y substituyendo en la propuesta, despues de haber ordenado con relacion á dz y dividido por dx^2, resultará $(x^2-2z^2)\dfrac{dz^2}{dx^2}-4xz\dfrac{dz}{dx}-x^2=0$, que expresa la relacion que debe exìstir entre la variable x, la funcion z y el coeficiente diferencial $\frac{dz}{dx}$, independientemente de ningun valor particular de a.

Resolviendo la equacion $z^2-2az+x^2=a^2$ con relacion á a, se hubiera sacado $a=-z\pm\sqrt{2z^2+x^2}$, y hallándose a separada de las variables x y z, la diferenciacion sola la hubiera hecho desaparecer; y se hubiera encontrado

$$-dz\pm\frac{2zdz+xdx}{\pm\sqrt{2z^2+x^2}}=0,\text{ de donde } dz=\frac{2zdz+xdx}{\sqrt{2z^2+x^2}},$$

ó quitando el divisor será $dz\sqrt{2z^2+x^2}=2zdz+xdx$, que elevada al quadrado da $dz^2(2z^2+x^2)=4z^2dz^2+4zxdzdx+x^2dx^2$,

que se reduce á $(x^2-2z^2)\dfrac{dz^2}{dx^2}-4xz\dfrac{dz}{dx}-x^2=0$,

que es la misma de antes.

558 Se pueden hacer desaparecer tantas constantes como se quiera, diferenciando un número de veces igual al de las constantes que se quieren hacer desaparecer.

Sea $z^2=m(a^2-x^2)$, y se tendrá desde luego

$2zdz=-2mxdx$ ó $zdz=-mxdx$;

diferenciando de nuevo se hallará $zd^2z+dz^2=-mdx^2$.

Substituyendo en vez de m su valor $-\frac{zdz}{xdx}$ sacado de la equacion precedente, y dividiendo por dx^2, tendremos $\frac{zdz}{dx}-x\frac{dz^2}{dx^2}-xz\frac{d^2z}{dx^2}=0$, resultado independiente de las constantes m y a.

559 La diferenciacion combinada con la eliminacion suministra el medio de hacer desaparecer las funciones irracionales.

Sea por exemplo $P^n=Q$, donde P y Q son funciones qualesquiera de x y de z; tomando la diferencial de esta equacion, resultará

$$nP^{n-1}d.P=d.Q,$$

ó multiplicando los dos miembros por P será $nP^nd.P=Pd.Q$; y si se pone en vez de P^n su valor Q, se obtendrá $nQd.P=Pd.Q$, equacion en que la cantidad P está exênta del exponente n.

Tambien se llega al mismo resultado, tomando el logaritmo de cada miembro de la equacion propuesta; pues seria $nlP=lQ$, $\frac{ndP}{P}=\frac{dQ}{Q}$.

Esta advertencia nos podria servir para desenvolver segun las potencias de x la funcion $(a+bx+cx^2+ex^3+\&c.)^n$, qualquiera que sea el exponente n; pero no nos detendremos en esto, pues basta observar que hallaríamos el resultado que obtuvimos por las series.

560 Tambien se pueden hacer desaparecer las trascendentes de una equacion combinándolas con sus diferenciales. Una de las mas simples funciones de estas es $l.(a+bx+cx^2+ex^3+\&c.)$ si su desarrollo se representa por $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.$ y se toma la diferencial de la equacion

$$l(a+bx+cx^2+ex^3+\&c.)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.$$

se hallará por exemplo dividiendo por dx

$$\frac{b+2cx+3ex^2+\&c.}{a+bx+cx^2+ex^3+\&c.}=B+2Cx+3Dx^2+\&c.$$

y se determinarán los coeficientes $A,B,C,$&c. quitando el divisor y comparando los coeficientes de los términos homólogos de x.

Tomemos aun por exemplo $sen.(a+bx+cx^2+ex^3+\&c.)$ si le hacemos igual con $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.$ y suponemos para abreviar

$$a+bx+cx^2+ex^3+\&c.=u,\quad A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.=z,$$

resultará $z=sen.u$, y diferenciando tendremos $dz=du\ cos.u$.

Se podria eliminar $cos.u$ por medio de la equacion

$cos.u=\sqrt{1-sen.^2u}$ que da $cos.u=\sqrt{1-z^2}$

y se tendria entonces $dz=du\sqrt{1-z^2}$;

pero seria necesario aun hacer desaparecer el radical en esta equacion. Para evitar este inconveniente, se diferenciará segunda vez la equacion $dz = du \cos. u$, acordándose que tanto u como z son funciones de x, y resultará $d^2z = d^2u. \cos. u - du^2 \operatorname{sen}. u$,

poniendo en vez de sen.u y cos.u sus valores z y $\frac{dz}{du}$.

se tendrá $d^2z = \frac{dz}{du} d^2u - zdu^2$ ó $dud^2z - dzd^2u + zdu^3 = 0$,

No falta ahora mas que substituir en vez de $z, dz, d^2z, du, d^2u, du^3$ sus valores; pero $z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$, da $dz = (B + 2Cx + 3Dx^2 + \&c.)dx$, $d^2z = (2C + 6Dx + \&c.)dx^2$, y para no empeñarnos en cálculos demasiado grandes, reduciremos la funcion propuesta á $\operatorname{sen}.(a + bx + cx^2)$ haciendo $e, f, \&c. = 0$.

En este caso particular
$du = (b + 2cx)dx$; $d^2u = 2cdx^2$; $du^3 = (b^3 + 6b^2cx + 12bc^2x^2 + 8c^3x^3)dx^3$; por medio de estos valores la equacion $dud^2z - dzd^2u + zdu^3 = 0$ se hace divisible por dx^3, y ordenándola con relacion á x toma la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{rrrr} 2bC & +\,6bDx & +\,12bEx^2 & +\,\&c. \\ & +\,4cCx & +\,12cDx^2 & +\,\&c. \\ +\,b^3A & +\,6b^2cAx & +\,12b^2cAx^2 & +\,\&c. \\ & +\,b^3Bx & +\,6b^2cBx^2 & +\,\&c. \\ & & +\,b^3Cx^2 & +\,\&c. \\ -\,2Bc & -\,4cCx & -\,6cDx^2 & -\,\&c. \end{array}\right\} = 0.$$

Igualando á cero los coeficientes de cada potencia de x, se obtendrán las equaciones que determinan á $C, D, E, \&c$; más para determinar A y B se necesita recurrir á la equacion primitiva, en la que haciendo $x = 0$ se tiene $\operatorname{sen}. a = A$,
y como en este mismo supuesto es $du = bdx$ y $dz = Bdx$,

la equacion $\frac{dz}{du} = \cos. u$ dará $\cos. a = \frac{Bdx}{bdx} = \frac{B}{b}$, de donde $B = b \cos. a$.

Aplicacion del cálculo diferencial para determinar los máxîmos y mínimos de las funciones de una sola variable.

361 Segun la idea que hemos dado de la funcion siempre que varie la variable debe variar la funcion; y como hay muchas funciones que tienen ciertos límites, aunque sus variables reciban todos los valores posibles, es interesante saber en quántas y en qué ocasiones varía la ley de los incrementos ó decrementos de la funcion, sin variar los de la variable.

En efecto, quando la variable de que depende una funcion propuesta pasa sucesivamente por todos los grados de magnitud, sucede algunas

veces que la serie de los valores que recibe esta funcion, es al principio creciente y se convierte despues en decreciente; entonces hay en dicha serie uno de estos valores que sobrepuja á los que le anteceden y siguen inmediatamente. Si al contrario, la serie de los valores de la funcion propuesta es al principio decreciente y se convierte en creciente, se encontrará necesariamente uno que será menor que los que le anteceden y siguen inmediatamente.

El término en que el incremento de una funcion se detiene se llama *máxîmo*, y aquel en que dexa de decrecer, *mínimo*. Sea, por exemplo, la equacion $z=1+8x-x^2$, en la qual observamos que si

$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$ &c.

resulta $z=1,\ 8,\ 13,\ 16,\ 17,\ 16,\ 13,$ &c.

donde vemos que quando $x=4$ resulta para z un valor máxîmo que es 17, el qual es mayor que los que le preceden y siguen inmediatamente.

562 Tomemos por segundo exemplo la funcion $z=b-(a-x)^2$; haciendo $x=0$ se tiene $z=b-a^2$;

y la cantidad $a-x$ viniendo á decrecer quando x aumenta, z aumenta tambien hasta que se tiene $x=a$, de donde resulta $z=b$ para el *máxîmo*; pero pasado este término, aunque x tome nuevos incrementos, z decrece y llega á ser nula quando $(a-x)^2=b$.

Se puede por otra parte verificar que el mayor valor de z responde á $x=a$, substituyendo sucesivamente $a+\delta$ y $a-\delta$ en vez de x; en uno y otro caso se encontrará por resultado $z=b-\delta^2$ que siempre es menor que b.

Sea aun $z=b+(a-x)^2$.

En este exemplo siendo x nula, se tiene $z=b+a^2$.

Despues al paso que x aumenta, la cantidad $(a-x)^2$ va disminuyendo, así como z hasta que $x=a$, pasado este término, $(a-x)^2$ aumenta y le sucede lo mismo á z, cuyo *mínimo* responde por consiguiente á la suposicion de $x=a$.

563 Toda funcion que crece ó decrece sin cesar, quando la variable de que depende crece ó decrece, no es susceptible de máxîmo ni de mínimo, pues que á un valor qualquiera sucede siempre uno mayor ó menor.

El carácter esencial del valor máxîmo de una funcion consiste en que los valores que le preceden y siguen inmediatamente sean menores; el mínimo al contrario, debe ser sobrepujado por los valores que le preceden y siguen inmediatamente.

Hemos dicho *inmediatamente*, porque sucede con freqüencia que una funcion tiene valores que sobrepujan á su *máxîmo* ó que son menores que su *mínimo* ó enfin que tiene muchos *máxîmos* y *mínimos* desiguales entre sí, todo lo qual es fácil de concebir: porque si despues de haber crecido ó decrecido esta funcion, vuelve á crecer de nuevo indefinidamente acabará por sobrepujar al *máxîmo* que tubo al principio.

En vez de suponer que crece indefinidamente, nosotros podemos concebir que decrezca despues de un cierto término, y de aqui nacerá un nuevo *máxîmo* que podrá ser diferente del primero; de donde se puede inferir lo que debe suceder quando estas mudanzas se repiten.

564 Pasemos ahora al método de que se hace uso para descubrir los *máxîmos* y los *mínimos* de las funciones de una sola variable; que es una de las mas importantes aplicaciones analíticas del cálculo diferencial. Antes de la invencion de este cálculo cada geómetra como Descartes, Fermat, &c. daba su regla particular para hallar los máxîmos y los mínimos; y aun la misma memoria de Leibnitz inserta en las actas de Leipsick año de 1684, en que se manifiestan los principios de dicho cálculo, tiene por objeto principalmente el de los máxîmos y mínimos, pues su título es: *Nova methodus pro maximis et minimis, quae, nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.* El marques del Hospital que expuso el cálculo diferencial en su obra intitulada: *Análisis de los infinitamente pequeños*, explicó el método de aplicarlo á la investigacion de los máxîmos y mínimos; pero este método era defectuoso en algunos casos, y por otra parte suponia el que se supiese ya que la funcion tenia máxîmo ó mínimo. Los geómetras posteriores han continuado con la misma explicacion del Hospital, hasta que en estos últimos tiempos Maclaurin, Cousin, Lagrange, Chaix y Lacroix, lo han explicado completamente por el teorema de Taylor. Pero la experiencia me ha hecho conocer que los principiantes tienen alguna dificultad en la práctica, sino se les fixa bien la atencion sobre este punto; y por lo mismo expondremos ante todas cosas la regla que se debe seguir, y la aplicaremos á varios casos, y despues pasaremos á manifestarles el fundamento de dicha regla que es la siguiente:

Quando se tiene una funcion y se quiere averiguar si tiene máxîmo ó mínimo, y en caso de que los tenga, quantos y quáles son, se practicará lo siguiente: *hállese el primer coeficiente diferencial é iguálese con cero su expresion; hállense los valores de la variable que satisfacen á esta equacion, y si hay máxîmo ó mínimo será en alguno de estos valores de la variable. Hállense despues los coeficientes diferenciales siguientes, substitúyase en ellos en vez de la variable cada valor de los que se hallaron por la igualacion á cero del primer coeficiente diferencial; cada valor de estos que reduzca á cero un número impar de coeficientes diferenciales, será un máximo ó un mínimo: será máxîmo si el primer coeficiente que no desaparece, tiene el signo negativo, y será mínimo si tiene el signo positivo. Si la substitucion de estos valores reduce á cero un número par de coeficientes diferenciales, la funcion propuesta no tendrá máxîmo ni mínimo.*

Sea por exemplo la funcion $z = 1 + 8x - x^2$, y tendremos hallando su coeficiente diferencial $\frac{dz}{dx} = 8 - 2x$,

que igualado con cero da $8-2x=0$, de donde $x=\frac{8}{2}=4$; hállese el segundo coeficiente diferencial y se tendrá $\frac{d^2z}{dx^2}=-2$; como es independiente de x, no se reducirá á cero por ningun valor que tenga esta variable; luego habiendo solo desaparecido un coeficiente diferencial, inferimos que quando $x=4$ hay máxîmo ó mínimo; pero como el primer coeficiente que no desaparece es una cantidad negativa, inferimos que dicho valor es máxîmo como debia verificarse.

Sea ahora $z=b\pm(a-x)^n$ y tendrémos $\frac{dz}{dx}=\mp n(a-x)^{n-1}$, que igualándole con cero da $(a-x)^{n-1}=0$, de donde $x=a$; luego si en dicha funcion hay máxîmo ó mínimo deberá ser quando $x=a$; pero si hallamos los coeficientes diferenciales superiores se tendrá

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\pm n(n-1)(a-x)^{n-2},$$

$$\frac{d^3z}{dx^3}=\mp n(n-1)(n-2)(a-x)^{n-3};$$

$$\frac{d^4z}{dx^4}=\pm n(n-1)(n-2)(n-3)(a-x)^{n-4};$$

. . . .

$$\frac{d^nz}{dx^n}=\pm n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2\times 1 \text{ quando } n \text{ es par},$$

y $$\frac{d^nz}{dx^n}=\mp n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2\times 1 \text{ quando ímpar.}$$

Donde advertimos que si n es un número entero, llegarán á desaparecer por el supuesto de $x=a$, $n-1$ coeficientes diferenciales; luego si n es par habrá máxîmo ó mínimo; y quando ímpar no habrá ni uno ni otro; porque entonces desaparece un número par de coeficientes diferenciales.

Ahora, como la qüestion abraza dos á causa del doble signo $\pm$, y quando n es par el coeficiente diferencial tiene el signo $\pm$, se deduce que quando n es par y se toma el signo $+$, la funcion es un *mínimo*; y quando el $-$ un *máxîmo*. regla que comprende á las dos que hemos deducido [562] para las funciones $z=b+(a-x)^2$ y $z=b-(a-x)^2$.

56[illegible]. Percibida ya la práctica de la regla, vamos á examinar analíticamente la qüestion para deducirla.

Con cuyo objeto concibamos que z sea una funcion qualquiera de x; y supongamos que x haya llegado al valor que da el máxîmo ó mínimo

de esta funcion; en este caso se infiere de las ideas de máxîmo y mínimo, que si se buscan los valores de z correspondientes á $x-k$ y á $x+k$, se deben obtener en ambos supuestos resultados menores que el *máxîmo* ó mayores que el *mínimo*.

Designando por $'z$ el valor de z que corresponde á $x-k$, y por z' el que corresponde á $x+k$, se tendrá por el teorema de Taylor [§535]

$$'z=z-\frac{dz}{dx}\times\frac{k}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}-\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\&c.$$

$$z'=z+\frac{dz}{dx}\times\frac{k}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\&c.$$

Y como hemos manifestado que se puede dar á k un valor bastante pequeño, paraque un término qualquiera sea mayor que la suma de todos los que le siguen, resulta que le podremos dar uno tal que el término $\frac{dz}{dx}k$ exceda á la suma de todos los que le siguen; entonces z será mayor que el primer valor $'z$ y menor que el segundo z'; luego la funcion propuesta no será por consiguiente ni un *máxîmo* ni un *mínimo*, mientras que $\frac{dz}{dx}k$ no sea nulo; porque, paraque haya máxîmo ó mínimo debe resultar z mayor ó menor á un mismo tiempo que $'z$ y z'; y si $\frac{dz}{dx}k$ no fuese cero, de los dos valores $'z$ y z', el uno siempre seria mayor y el otro menor. Pero un término no puede ser cero sino lo es alguno de sus factores, y como aqui k no puede ser cero, porque le suponemos un valor determinado, aunque pequeño, se deduce que $\frac{dz}{dx}$ será el que deba ser cero.

Luego siendo indispensable que $\frac{dz}{dx}=0$, paraque haya un valor máxîmo ó mínimo, se tendrá entonces

$$'z=z+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}-\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\frac{d^4z}{dx^4}\times\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}\&c.$$

$$z'=z+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\frac{d^4z}{dx^4}\times\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}\&c.$$

y en este caso sí se podrá tener á un mismo tiempo $z<'z$ y $z<z'$, que seria siempre que $\frac{d^2z}{dx^2}$ fuese positivo; y $z>'z$, $z>z'$ quando fuese $\frac{d^2z}{dx^2}$

negativo; el primer caso daria para z un *mínimo*, y el segundo un *máxîmo*.

De donde inferiremos que *para encontrar quándo una funcion z debe tener un máxîmo ó un mínimo, porque en ambos casos lo da una misma equacion, es necesario buscar la expresion del primer coeficiente diferencial é igualarla á cero, que es la primera parte de la regla.*

Hemos dicho que paraque haya *máxîmo ó mínimo* es indispensable que $\frac{dz}{dx}$ sea igual con cero; pero no por esto se debe inferir que siempre que $\frac{dz}{dx} = 0$, deba haber *máxîmo ó mínimo*. En efecto, si el valor de x que hace nulo el valor de $\frac{dz}{dx}$, hiciese desvanecer al mismo tiempo $\frac{d^2z}{dx^2}$, sin que $\frac{d^3z}{dx^3}$ desapareciese, como se hallaria en esta circunstancia

$$'z = z - \frac{d^3z}{dx^3} \times \frac{k^3}{1\times2\times3} + \frac{d^4z}{dx^4} \times \frac{k^4}{1\times2\times3\times4} - \frac{d^5z}{dx^5} \times \frac{k^5}{1\times2\times3\times4\times5} + \&c.$$

$$z' = z + \frac{d^3z}{dx^3} \times \frac{k^3}{1\times2\times3} + \frac{d^4z}{dx^4} \times \frac{k^4}{1\times2\times3\times4} + \frac{d^5z}{dx^5} \times \frac{k^5}{1\times2\times3\times4\times5} + \&c.$$

y que $\frac{d^3z}{dx^3} \times \frac{k^3}{1\times2\times3}$ podria llegar á ser mayor que la suma de todos los que le siguen, no habria entonces entre las tres cantidades $'z, z, z'$ la subordinacion que conviene al *máxîmo* ó al *mínimo*; pues la media z seria mayor que la una de las extremas y menor que la otra.

Pero si se tubiese tambien $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ resultaria

$$'z = z + \frac{d^4z}{dx^4} \times \frac{k^4}{1\times2\times3\times4} - \frac{d^5z}{dx^5} \times \frac{k^5}{1\times2\times3\times4\times5} + \&c.$$

$$z' = z + \frac{d^4z}{dx^4} \times \frac{k^4}{1\times2\times3\times4} + \frac{d^5z}{dx^5} \times \frac{k^5}{1\times2\times3\times4\times5} + \&c.$$

en donde las condiciones del *máxîmo* ó del *mínimo* quedarian aun satisfechas, y se reconoceria por medio del signo de $\frac{d^4z}{dx^4}$ quál de los dos debia tener lugar.

Del mismo modo se haria ver que en general no puede haber *máxîmo ó mínimo*, sino quando el primero de los coeficientes diferenciales que

no desaparece, es de un órden par; y si este coeficiente es negativo, la funcion en aquel caso será *máxîmo*, y si positivo, *mínimo*; lo que completa la regla que hemos dado antes.

556 La teoría de los *máxîmos* y *mínimos* se suele aplicar á todo género de qüestiones y de suma importancia; pero como la determinacion se hace siempre por un mismo método, solo nos detendremos en la qüestion siguiente.

Supongamos que *se trate de dividir una cantidad* a *en dos partes tales que el producto de la potencia* m *de la primera por la potencia* n *de la segunda, sea el máxîmo de todos los productos semejantes que se podrian formar.*

Sea x una de las partes de a, con lo que la otra será $a-x$, y el producto cuyo máxîmo se busca, estando representado por z se tendrá

$$z=x^m(a-x)^n,$$

de donde se sacará $\frac{dz}{dx}=mx^{m-1}(a-x)^n-nx^m(a-x)^{n-1}=\ldots$

$x^{m-1}(a-x)^{n-1}[m(a-x)-nx]$,

que igualándolo con cero será $x^{m-1}(a-x)^{n-1}(ma-mx-nx)=0$;
que da á causa del primer factor, $x=0$;
á causa del segundo $a-x=0$ ó $x=a$,
y á causa del tercero $ma-mx-nx=0$ ó $x=\frac{ma}{m+n}$.

El último de estos valores responde á un máxîmo, porque quando se le substituye en la expresion general de $\frac{d^2z}{dx^2}$,

da la cantidad negativa $-\frac{m^{m-1}n^{n-1}a^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-3}}$;

los otros dos responderán á *mínimos* quando m y n sean pares, como nos podemos asegurar por el exâmen de los coeficientes diferenciales, ó mas simplemente aun haciendo $x=x-k$ y $x=x+k$; pues siempre se encontrará un resultado positivo en uno y otro caso, qualquiera que sea el signo que se dé á k; lo que prueba que la funcion propuesta despues de haber decrecido hasta llegar á ser nula, no pasa á ser negativa sino que vuelve á crecer.

567 Consideremos aun la funcion que designa z en la equacion

$$z^2-2mxz+x^2-a^2=0,$$

cuya diferencial es $2zdz-2mxdz-2mzdx+2xdx=0$,
que despues de haber suprimido el factor comun 2 y resuelto en factores, se convierte en $(z-mx)dz-(mz-x)dx=0$, que da $\frac{dz}{dx}=\frac{mz-x}{z-mx}$;

é igualando esta expresion á cero, será $mz-x=0$ ó $z=\frac{x}{m}$,

cuyo valor substituido en la propuesta dará

$\frac{x^2}{m^2}-2mx\times\frac{x}{m}+x^2-a^2=0$, que se convierte en $\frac{x^2}{m^2}-x^2-a^2=0$,

ó quitando el divisor en $x^2-m^2x^2=m^2a^2$,

que da $x^2=\frac{m^2a^2}{1-m^2}$, y $x=\frac{ma}{\sqrt{1-m^2}}$,

cuyo valor substituido en el de z dará $z=\frac{a}{\sqrt{1-m^2}}$.

Falta exâminar en lo que se convierte el coeficiente diferencial $\frac{d^2z}{dx^2}$. La diferencial segunda de la equacion propuesta da la siguiente

$$(z-mx)\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}-2m\frac{dz}{dx}+1=0,$$

que la suposicion de $\frac{dz}{dx}=0$ la reduce á $(z-mx)\frac{d^2z}{dx^2}+1=0$,

de donde se saca

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{1}{z-mx}=-\frac{1}{\frac{x}{m}-mx}=-\frac{m}{x-m^2x}=-\frac{m}{x(1-m^2)},$$

y substituyendo ahora en vez de x su valor $\frac{ma}{\sqrt{1-m^2}}$,

resultará $\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{m}{\frac{ma}{\sqrt{1-m^2}}\times(1-m^2)}=-\frac{1}{a\sqrt{1-m^2}}$,

resultado que siendo negativo, manifiesta que el valor de z encontrado arriba es un *máxîmo*.

568 Quando la funcion es de dos ó mas variables se pueden hallar los *máxîmos relativos* y los *máxîmos absolutos*. Si en una funcion de dos variables, por exemplo, se considera una como constante, y se dan á la otra quantos valores se quieran, á cada uno de estos valores corresponderá uno ó muchos valores de la funcion propuesta, entre los quales se podrán hallar algunos que sean *máxîmos* ó *mínimos*, que se determinarán por lo que acabamos de exponer; de manera que siendo z una fun-

cion de x y de u, si se supone u constante y se hace $\frac{dz}{dx}=0$, se obtendrán los valores de x que dan los mayores y menores valores de z entre todos los que responden á un mismo valor de u.

El resultado que se obtiene de esta manera es aun indeterminado, pues que puede variar en razon de las mudanzas que se hagan padecer á la segunda variable u, y no ofrece por consiguiente sino *máxîmos ó mínimos relativos*, entre los quales puede existir un número limitado de ellos que sean mayores ó menores que todos los otros, y que correspondan á valores determinados de u. Estos últimos que estan enteramente determinados son *máxîmos ó mínimos absolutos* de la funcion propuesta; se descubririan fácilmente eliminando x de la funcion z por medio de la equacion $\frac{dz}{dx}=0$, lo que haria que la funcion lo fuese ya solo de una variable u; y señalando por z el resultado, bastaria entonces hacer $\frac{dz}{du}=0$, para determinar u convenientemente al estado de la qüestion.

569 Los caractéres distintivos de los máxîmos y de los mínimos en las funciones de muchas variables se deducen de principios análogos á los que se emplean en las funciones de una sola; pero la aplicacion es mas complicada, por lo que solo trataremos de los de una funcion de dos variables.

Sea z una funcion de x y de u, y supongamos que A,B,C,D,E,F,&c. sean los valores que toman respectivamente

$$z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{dz}{du},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dxdu},\ \frac{d^2z}{du^2},\ \text{\&c.}$$

quando se substituye a en vez de x y b en vez de u, el resultado de la substitucion de $a+k,b+h$ en z será [§539 (γ)]

$$A+Bk+Ch+\frac{1}{1\times 2}(Dk^2+2Ekh+Fh^2)+\text{\&c.};$$

expresion cuyo valor debe ser menor que A en el caso del máxîmo absoluto, y mayor en el caso del mínimo, qualesquiera que sean los signos de las letras k,h, con tal que no expresen sino pequeñas mudanzas. Pero como los términos del primer órden Bk,Ch, que se pueden hacer mayores que todos los otros tomando á k y á h de una pequeñez suficiente, mudan de signo al mismo tiempo que estas cantidades, deduciremos por un razonamiento análogo al del [565] que en el caso del máxîmo ó del mínimo, se deberá tener por precision $B=\frac{dz}{dx}=0, C=\frac{dz}{du}=0$;

por lo que la expresion de arriba se reducirá á

$$A+\tfrac{1}{2}(Dk^2+2Ekh+Fh^2)+\&c.$$

Satisfechas estas condiciones por los valores a y b que ellas mismas determinan, será necesario despues que los coeficientes $D.E$ y F, no se desvanezcan al mismo tiempo, y ademas que la cantidad $Dk^2+2Ekh+Fh^2$ sea siempre negativa en el máxîmo y positiva en el mínimo, independientemente de los valores que se pueden dar á k y á h.

Pero si añadimos y quitamos $\frac{-h^2E^2}{D}$ á dicha cantidad, se nos convertirá en

$$Dk^2+2Ekh+\frac{E^2h^2}{D}+Fh^2-\frac{E^2h^2}{D}=D\left(k+\frac{Eh}{D}\right)^2+h^2\left(F-\frac{E^2}{D}\right)\ (\mu).$$

Puesta baxo este aspecto resulta que como $\left(k+\frac{Eh}{D}\right)^2$ y h^2 son positivas, qualesquiera que sean los valores de k y de h, paraque dicha cantidad sea siempre negativa es preciso que lo sean D y $F-\frac{E^2}{D}$. Por lo qual deberá ser en el caso del máxîmo $D<0$ y $F-\frac{E^2}{D}<0$; pero el ser D negativa hará que el término $-\frac{E^2}{D}$ sea positivo, y no se podrá verificar que $F+\frac{E^2}{D}$ sea negativo, si no es F negativa como D, y se tiene

$$F>\frac{E^2}{D} \text{ ó } FD>E^2 \text{ que da } FD-E^2>0.$$

Paraque la cantidad (μ) sea siempre positiva será necesario que siempre lo sean D y $F-\frac{E^2}{D}$; por lo qual en el caso del mínimo deberá ser $D>0, F-\frac{E^2}{D}>0$; y siendo D positiva la segunda cantidad no podrá serlo si F no lo es y mayor que $\frac{E^2}{D}$, esto es, $F>\frac{E^2}{D}$, que da $FD>E^2$ ó $FD-E^2>0$.

Por lo que se deduce que *paraque haya máxîmo ó mínimo es necesario que* $FD>E^2$; *y si ademas de esta circunstancia se verifica que* $D<0$ *habrá máxîmo*, *y si* $D>0$ *habrá mínimo*; *si una de estas canti-*

dades D,F, *ó ambas fuesen iguales con cero, sin que lo fuese* E *al mismo tiempo, la funcion propuesta no tendria máxîmo ni mínimo.*

Si los coeficientes de 2.º órden se aniquilasen al mismo tiempo que los del primero, no habria máxîmo ó mínimo á menos que no desapareciesen tambien los coeficientes del tercer órden, y que los términos del quarto no formasen una cantidad cuyo signo no dependiese en ninguna manera de k y de h; y así en adelante.

570 Con el fin de dar un exemplo, nos propondremos la siguiente qüestion que es análoga á la resuelta antes.

Dividir la cantidad a *en tres partes* x,u,a—x—u, *tales que el producto* $x^m u^n (a-x-u)^p$ *sea un máxîmo.*

En cuyo caso será $z=x^m u^n (a-x-u)^p$,

$$\frac{dz}{dx}=x^{m-1}u^n(a-x-u)^{p-1}(ma-mx-mu-px)=0,$$

$$\frac{dz}{du}=x^m u^{n-1}(a-x-u)^{p-1}(na-nx-nu-pu)=0,$$

que igualando á cero los factores $ma-mx-mu-px$ y $na-nx-nu-pu$, dan $x=\frac{ma}{m+n+p}$, $u=\frac{na}{m+n+p}$, $a-x-u=\frac{pa}{m+n+p}$.

Para saber si estos valores pertenecen en efecto á un máxîmo, los substituiremos en las expresiones generales de $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdu}$, $\frac{d^2z}{du^2}$; y haciendo para abreviar $m+n+p=q$, se hallará

$$D=-(m+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^{n}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$

$$E=-\frac{mna}{q}\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$

$$F=-(n+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m}\left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1}.$$

Las cantidades D y F son negativas, y efectuando su multiplicacion hallaremos que cumplen con la condicion de ser $DF-E^2$ una cantidad positiva quando los exponentes m,n,p son positivos; por lo que en este caso se tendrá el máxîmo pedido.

De los valores que toman en ciertos casos los coeficientes diferenciales, y de las expresiones que se convierten en $\frac{0}{0}$.

571 Si se buscase el máxîmo ó el mínimo de la funcion $az=\sqrt{a^2x^2-x^4}$ por exemplo, se deduciria de ella $\frac{dz}{dx}=\frac{a^2x-2x^3}{a\sqrt{a^2x^2-x^4}}$ que haciéndole igual con cero, daria $x=0$ y $\frac{dz}{dx}=\frac{0}{0}$.

Sin embargo, con un poco de atencion se verá que el numerador y denominador de la fraccion $\frac{a^2x-2x^3}{a\sqrt{a^2x^2-x^4}}$, no se desvanecen á un mismo tiempo, sino porque estan afectos del factor comun x.

Si se suprime en ambos, se hallará $\frac{dz}{dx}=\frac{a^2-2x^2}{a\sqrt{a^2-x^2}}$,

que en el supuesto de ser $x=0$ da $\frac{dz}{dx}=\frac{a^2}{a\sqrt{a^2}}=\frac{a^2}{\pm a^2}=\pm 1$.

En general si se hace $x=a$ en una expresion de esta forma $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$ se convertirá en $\frac{0}{0}$; sin embargo, su verdadero valor debe ser nulo, finito ó infinito, segun se tenga $m>n, m=n, m<n$; porque borrando los factores comunes al numerador y denominador se hallará $\frac{P(x-a)^{m-n}}{Q}$ en el primer caso; $\frac{P}{Q}$ en el 2.º; y $\frac{P}{Q(x-a)^{n-m}}$ en el 3.º; en el supuesto de que las cantidades P y Q no sean nulas ni infinitas por la suposicion de $x=a$.

Luego quando se presenta una expresion qualquiera baxo la forma $\frac{0}{0}$, es necesario para conocer su verdadera significacion, desprenderla de los factores comunes á su numerador y denominador. La diferenciacion nos suministrará este medio con mas sencillez que el método de hallar el comun divisor.

572 La diferencial de la expresion $P(x-a)$ en que P designa una funcion qualquiera de x, pero independiente del factor $(x-a)$; siendo $(x-a)dP+Pdx$, no se desvanece ya quando $x=a$.

Si se diferencias dos veces la funcion $P(x-a)^2$ se hallaria

$(x-a)^2dP+2P(x-a)dx$,

$(x-a)^2d^2P+2(x-a)dP.dx+2(x-a)dx.dP+2Pdx^2=\ldots$

$(x-a)^2d^2P+4(x-a)dP.dx+2Pdx^2$;

y como P no contiene á $x-a$, la diferencial segunda se reduciria á su último término: continuando del mismo modo deduciríamos que todas las diferenciales de una expresion de la forma $P(x-a)^m$, hasta la del órden $m-1$ inclusive, se desvanecen en el supuesto de ser $x=a$, quando m es un número entero, y que entonces la diferencial del órden m se reduce á $1\times2\times3.\ .\ .\ .mPdx^m$;
luego el factor $(x-a)^m$ desaparece en esta hipótesis despues de m diferenciaciones.

No es necesario conocer el exponente m aunque el factor $(x-a)^m$ esté manifiesto, para saber quando la expresion está libre de él; basta asegurarse despues de cada diferenciacion, si el resultado obtenido se desvanece ó no, quando se pone a en lugar de x; en el último caso la operacion es finita, y lo que se ha encontrado representa la cantidad

$$1\times2\times3.\ .\ .\ .mPdx^m.$$

Sea, por exemplo, la funcion $x^3-ax^2-a^2x+a^3$, que se desvanece en el supuesto de $x=a$; su diferencial primera se desvanece tambien en esta hipótesis, pero no su diferencial segunda que es $(6x-2a)dx^2$, la qual se encuentra ya libre del factor $(x-a)$; y pues que ha sido necesario para esto diferenciar dos veces de seguida, se debe concluir que es de la forma $P(x-a)^2$; lo que en efecto se verifica, pues que

$$x^3-ax^2-a^2x+a^3=(x+a)(x-a)^2.$$

573 Aplicando lo que precede á la fraccion $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$, se verá que diferenciando muchas veces de seguida su numerador y denominador, quedarán libres á un mismo tiempo del factor $(x-a)$ si $m=n$.

Si el numerador es el primero que da un resultado que no se desvanece, será una prueba de que el factor $(x-a)$ se encuentra elevado en él á una potencia menor que en el denominador, y por consiguiente la fraccion propuesta será infinita; si al contrario es el denominador, la fraccion propuesta será nula.

Luego podremos establecer que *para obtener el verdadero valor de una fraccion que se convierte en* $\frac{0}{0}$ *quando se da á* x *un valor particular, es necesario diferenciar separadamente su numerador y su denominador, hasta que se encuentre para uno ú otro un resultado que no se desvanezca; la funcion propuesta será infinita en el primer caso, nula en el segundo, y tendrá un valor finito, si se hallan á un mismo tiempo dos resultados que no se aniquilan.*

574 Algunos exemplos aclararán esto suficientemente.

1.° La fórmula $\frac{x^n-1}{x-1}$ que expresa la suma de la progresion geométrica $\div\div 1:x:x^2:x^3$.&c. se convierte en $\frac{0}{0}$ quando $x=1$; sin embargo esta suma, en la progresion geométrica $\div\div 1:1:1:1$:&c. á que nos conduce

dicho supuesto, tiene un valor determinado é igual con n, que la regla precedente nos va á suministrar tambien. En efecto, despues de haber diferenciado el numerador y el denominador de la expresion $\frac{x^n-1}{x-1}$, se halla $\frac{nx^{n-1}dx}{dx}=nx^{n-1}=n$ quando $x=1$.

2.° El verdadero valor de $\frac{ax^2-2acx+ac^2}{bx^2-2bcx+bc^2}$ en el caso en que $x=c$ no se puede obtener sino despues de dos diferenciaciones; porque la primera da $\frac{2axdx-2acdx}{2bxdx-2bcdx}=\frac{ax-ac}{bx-bc}$, resultado que se convierte en $\frac{0}{0}$ quando $x=c$; pero volviendo á diferenciar se halla $\frac{adx}{bdx}=\frac{a}{b}$.

575 Aunque no se ve inmediatamente como es posible dar la forma $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$ á la funcion trascendente $\frac{a^x-b^x}{x}$, que se convierte en $\frac{0}{0}$ quando $x=0$, no obstante se le puede aplicar la regla, y despues de haber diferenciado su numerador y denominador se encuentra $a^x la-b^x lb$; que substituyendo en vez de x cero, se convierte en $la-lb$ que expresa el valor buscado.

Este resultado se obtiene inmediatamente substituyendo en vez de las funciones a^x, b^x sus desarrollos, porque en este caso resulta

$$\frac{a^x-b^x}{x}=(la-lb)+[(la)^2-(lb)^2]\ \frac{x}{1\times2}+\&c.$$

que en el supuesto de $x=0$ se reduce á $la-lb$.

576 La regla dada [§ 573] no seria aplicable al caso en que los factores que se desvanecen, estan elevados á potencias fraccionarias; porque las diferenciaciones sucesivas no quitando sino unidades del exponente m del factor $(x-a)$, no le pueden reducir á cero quando es fraccionario: solamente llega á ser negativo quando el número de las diferenciaciones es mayor que el entero que se hallaba contenido en él. Si se tubiese por exemplo $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$, aunque el verdadero valor de esta funcion quando $x=a$ es $(2a)^{\frac{3}{2}}$, no se llegaria jamas á él por la diferenciacion, pues se encontraria sucesivamente

$$\frac{3x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}(x-a)^{\frac{1}{2}}};\ \frac{3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+3x^2(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}}.$$

El primero de estos resultados se convierte en $\frac{0}{0}$ quando se hace $x=a$; y el mismo supuesto hace infinitos los numeradores y denominadores de cada uno de los siguientes. Si se hacen desaparecer los exponentes negativos, pasando al denominador los que estan en el numerador y vice-versa, las nuevas expresiones que nazcan de esta mudanza se reducirán todas á $\frac{0}{0}$.

Esta dificultad proviene de que la diferencial de una funcion de x, no puede ser de la forma Adx, quando un valor particular de x hace desaparecer algun radical ó una irracionalidad en esta funcion.

En efecto, si se tubiese $z=b+\sqrt{x-a}$ por exemplo, y se quisiese encontrar el valor consecutivo de z quando $x=a$; seria necesario poner $a+\Delta x$ en lugar de x; y resultaria $z+\Delta z=b+\sqrt{\Delta x}$,

y la diferencia será $\Delta z=\sqrt{\Delta x}=(\Delta x)^{\frac{1}{2}}$;
la irracionalidad afecta en este caso al incremento que en general se halla exênto de irracionalidad; de donde $\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^{\frac{1}{2}}}{\Delta x}=\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{2}}}$;

y pasando á los límites seria $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{0^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{0}=\infty$,

luego el valor de A seria infinito.

577. Hé aqui un procedimiento general, exênto de toda dificultad, que comprende á la regla dada [§ 573] y que presentamos el último, porque nos ha parecido que las consideraciones del párrafo citado podian dar mucha luz sobre el objeto que nos ocupa.

Sea $\frac{X}{X'}$ una fraccion cuyo numerador y denominador se desvanecen á un tiempo quando $x=a$. Substituyendo $a+k$ en vez de x, las funciones X, X' se desenvolverian en series ascendentes de la forma

$$Ak^{\alpha}+Bk^{\beta}+\&c.\ A'k^{\alpha'}+B'k^{\beta'}+\&c.,$$

las quales no contienen ningun término constante, porque deben ser nulas quando $k=0$ que corresponde al supuesto de $x=a$; luego se tendrá $\frac{Ak^{\alpha}+Bk^{\beta}+\&c.}{A'k^{\alpha'}+B'k^{\beta'}+\&c.}$ en lugar de la fraccion propuesta.

En efecto, si en este resultado se supone $k=0$, se debe volver á ob-

tener el valor que recibe la funcion $\frac{X}{X'}$ quando se convierte x en a; y aunque parezca reducirse al principio á $\frac{0}{0}$, se va á ver sin embargo que tiene un valor determinado.

Distinguiendo los tres casos de $\alpha>\alpha'$, $\alpha=\alpha'$ y $\alpha<\alpha'$, podremos en los dos primeros escribir la expresion precedente como sigue

$$\frac{Ak^{\alpha-\alpha'}+Bk^{\beta-\alpha'}+\&c.}{A'+B'k^{\beta'-\alpha'}+\&c.};$$

baxo esta forma se percibe que si α sobrepuja α', la suposicion de $k=0$ hace la fraccion nula, y que se reduce á $\frac{A}{A'}$ quando se tiene $\alpha=\alpha'$.

En el tercer caso en que $\alpha<\alpha'$ se verifica lo contrario, pues se tiene

$$\frac{A+Bk^{\beta-\alpha}+\&c.}{A'k^{\alpha'-\alpha}+B'k^{\beta'-\alpha}+\&c.},$$

y este resultado se hace infinito por la suposicion de $k=0$. En todos estos casos el verdadero valor que se busca no depende sino del primer término de cada serie.

Y así, la regla siguiente se extiende á todas las funciones que se pueden presentar baxo la forma indeterminada $\frac{0}{0}$: *búsquese el primer término de cada una de las series ascendentes que expresan el desarrollo del numerador y del denominador, quando* $x=a+k$; *redúzcase á su expresion mas simple la nueva fraccion formada de estos primeros términos, y hágase despues* $k=0$; *los resultados que se obtengan serán los diferentes valores que toma la fraccion propuesta quando se hace* $x=a$.

Esta regla parecerá algunas veces mas cómoda que el procedimiento de la diferenciacion en el caso en que se puede emplear. Y así, en la fraccion

$$\frac{x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{2ax-a^2}}{x^2-2ax-a^2+2a\sqrt{2ax-x^2}}$$

solo despues de quatro diferenciaciones, llegaremos á encontrar el verdadero valor en el caso de ser $x=a$.

Escribiendo $a+k$ en vez de x como lo prescribe la regla, resulta

$$\frac{2a^3+2a^2k-ak^2+k^3-2a^2\sqrt{a^2+2ak}}{-2a^2+k^2+2a\sqrt{a^2-k^2}}$$

desenvolviendo en serie las dos cantidades radicales, se tendrá

$$\sqrt{a^2+2ak}=a+k-\frac{k^2}{2a}+\frac{k^3}{2a^2}-\frac{5k^4}{8a^3}+\&c.$$

$$\sqrt{a^2-k^2}=a-\frac{k^2}{2a}-\frac{k^4}{8a^3}-\&c.$$

La substitucion de estas dos series en la fraccion precedente dará $-5a$ para el valor buscado quando $k=0$.

En el caso en que el valor particular de x hace desaparecer algunos radicales, y que por esto se escapan de la regla [573], es necesario por precision recurrir á este. La fraccion $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$, cuyo valor no se puede obtener por la diferenciacion quando $x=a$ da $\frac{(2ak+k^2)^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{3}{2}}}=(2a+k)^{\frac{3}{2}}$, mudando x en $a+k$; y haciendo $k=0$ se obtiene su verdadero valor $(2a)^{\frac{3}{2}}$.

578 Una funcion puede presentarse aun baxo muchas formas indeterminadas, diferentes en apariencia de $\frac{0}{0}$; pero que en realidad son la misma y que conviene dar á conocer.

1.° El numerador y el denominador de la fraccion $\frac{X}{X'}$, pueden ser infinitos al mismo tiempo; pero esta fraccion estando escrita así $\frac{\frac{1}{X'}}{\frac{1}{X}}$, se reduce á $\frac{0}{0}$ quando X y X' son infinitas.

2.° Puede ocurrir el encontrar un producto compuesto de dos factores, el uno infinito y el otro nulo. Sea PQ este producto, si la suposicion de $x=a$ da $P=0, Q=\frac{1}{0}$, se hará $Q=\frac{1}{R}$, y R será una cantidad nula en el mismo supuesto; luego resultará $PQ=\frac{P}{R}=\frac{0}{0}$.

579 Si se pidiese el valor que recibe la funcion $\frac{lx}{x^n}$ quando x es infinita, ó lo que es lo mismo, el límite de esta funcion para los incrementos de x, no se podria llegar á él por ninguno de los procedimientos de que hemos hecho uso hasta ahora, á causa de la imposibilidad de desen-

volver en serie lx; y seria necesario recurrir á las consideraciones particulares sobre la naturaleza de la funcion propuesta lx. Se tiene $e^{lx}=x$, y la teoría de las series da

$$x=1+\frac{lx}{1}+\frac{(lx)^2}{1\times2}+\frac{(lx)^3}{1\times2\times3}+\&c.$$

$$\text{y } x^n=1+\frac{n(lx)}{1}+\frac{n^2(lx)^2}{1\times2}+\frac{n^3(lx)^3}{1\times2\times3}+\&c.$$

de donde se concluirá

$$\frac{lx}{x^n}=\frac{lx}{1+\frac{nlx}{1}+\frac{n^2(lx)^2}{1\times2}+\frac{n^3(lx)^3}{1\times2\times3}\&c.}=\frac{1}{\frac{1}{lx}+n+\frac{n^2lx}{1\times2}+\frac{n^3(lx)^2}{1\times2\times3}\&c.}$$

cantidad que se aproxîma á ser nula á medida que x aumenta, porque en este caso sucede lo mismo á lx.

580 Una equacion $V=0$, que tiene raices iguales, es necesariamente de la forma $V=X(x-a)^n=0$ conteniendo el factor X las raices desiguales; y se sigue de lo dicho [572] que todos los coeficientes diferenciales $\frac{dV}{dx}$, $\frac{d^2V}{dx^2}$... hasta $\frac{d^{n-1}V}{dx^{n-1}}$ inclusivamente, se desvanecerán por la suposicion de $x=a$, porque contendrán el factor $x-a$ que estará elevado á la potencia $n-1$ en el primero, á la potencia $n-2$ en el segundo, y así sucesivamente.

Luego las equaciones $V=0$, $\frac{dV}{dx}=0$, $\frac{d^2V}{dx^2}=0$.... $\frac{d^{n-1}V}{dx^{n-1}}=0$ tendrán lugar á un mismo tiempo, y si se busca el divisor comun entre la primera y la segunda que son respectivamente

$$X(x-a)^n=0,\ \frac{dX}{dx}(x-a)^n+nX(x-a)^{n-1}=0,$$

hallaremos que es $(x-a)^{n-1}$.

Estas consideraciones se aplican fácilmente al caso en que la propuesta contenga muchas especies de raices iguales, es decir, al caso en que sea de la forma $X(x-a)^n(x-b)^m=0$.

Porque diferenciando el primer miembro se hallará

$$(x-a)^n(x-b)^m\frac{dX}{dx}+nX(x-a)^{n-1}(x-b)^m+mX(x-a)^n(x-b)^{m-1},$$

cantidad que se desvanece tambien quando se hace $x=a$ ó $x=b$, y cuyo divisor comun con el primer miembro de la equacion propuesta es

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{m-1}.$$

Del mismo modo se puede obrar qualquiera que sea el número de los

factores $(x-a)^n.(x-b)^m.(x-c)^p$, &c. y se encontraria siempre que *el divisor comun entre las equaciones* $V=0$, $\frac{dV}{dx}=0$, *debe contener raices iguales elevadas cada una á una potencia menor en una unidad que en la propuesta* $V=0$.

Aplicacion del cálculo diferencial á la teoría de las lineas curvas.

581 Las investigaciones geométricas son las que dieron orígen al cálculo diferencial. Los Geómetras por consideraciones acerca de las lineas curvas fueron conducidos á este portentoso cálculo, que despues se ha presentado baxo diferentes puntos de vista; más qualquiera que sea su orígen, siempre estribará inmediatamente sobre un hecho analítico preexîstente á toda hipótesis; y este hecho es precisamente la propiedad que gozan todas las funciones de admitir un límite en la relacion que sus incrementos tienen con los de la variable de que dependen. Este límite, diferente para cada funcion, pero constante para una misma y siempre independiente de los valores absolutos de los incrementos, caracteriza de un modo que le es propio, la *marcha* de esta funcion en los diversos estados por que puede pasar. En efecto, mientras mas pequeños son los incrementos de la variable independiente, mas próxîmos estan los valores sucesivos de la funcion, mas se acerca esta funcion á quedar sometida á la ley de continuidad en sus mudanzas con las de la variable independiente, y se aproxîma á ser igual al límite señalado por el cálculo. Por *ley de continuidad* se debe entender la que se observa en la descripcion de las lineas por el movimiento, y segun la qual los puntos consecutivos de una misma linea se suceden sin ningun intervalo.

El modo de considerar las magnitudes en el cálculo no parece admitir esta ley, pues que se supone siempre un intervalo entre dos valores consecutivos de la misma cantidad; pero mientras mas pequeño es este intervalo, mas se aproxîma á la ley de continuidad; en virtud de la qual resulta que los incrementos aunque se desvanezcan, conservan aun la relacion á que se han aproxîmado por grados antes de desvanecerse.

582 Las consideraciones geométricas prueban de un modo muy exâcto que la relacion de los incrementos de una funcion y de su variable es en general susceptible de límites.

Toda funcion de una sola variable se puede representar por la ordenada de una curva de la que esta variable es la abscisa; porque si vamos dando valores particulares á la abscisa, y tomamos estas partes á lo largo de una linea, y en los extremos se levantan lineas paralelas entre sí, de la magnitud que exprese la funcion en cada caso, tendremos construida una curva cuya equacion sea la igualacion de la funcion propuesta con una variable; ahora, la relacion de la ordenada de la curva con su subtangente corresponde al coeficiente diferencial de la funcion. En

efecto, si en una curva CD (fig. 179) se tira por dos puntos M y M′ una secante MM′ prolongada hasta que encuentre en S al exe AB de las abscisas, se baxan despues las ordenadas PM.P′M′ y la recta MQ paralela á AB, los triángulos semejantes MQM′ y PMS darán PM:PS::M′Q:MQ[I. 485 cor. 2.º] de donde $\frac{PS}{PM}=\frac{MQ}{M'Q}=\frac{\Delta x}{\Delta z}$;

y pasando á los límites se tendrá *límite* de $\frac{PS}{PM}$ = *límite* de $\frac{\Delta x}{\Delta z}$;

pero el límite del primer miembro es $\frac{PT}{PM}=\frac{subt.}{z}$, porque á medida que el punto M′ se aproxîma al punto M, se acerca S á T, y por consiguiente la *subsecante* PS á la *subtangente* PT: y como el límite del segundo miembro es $\frac{dx}{dz}$ será $\frac{subt.}{z}=\frac{dx}{dz}$ ó $subt.=z\times\frac{dx}{dz}$,

que es la fórmula general que determina la subtangente de una curva qualquiera, y nos dice que *debemos hallar el valor del coeficiente diferencial* $\frac{dx}{dz}$ *de la abscisa con relacion á la ordenada*, *multiplicarle por el valor de la ordenada*, *y este será el valor de la subtangente.*

383 *Quando se dan á la abscisa valores sucesivos, las ordenadas que corresponden á estos valores determinan en la curva puntos, que se pueden considerar como vértices de los ángulos de un polígono inscripto en esta curva.*

Si se toman, por exemplo, sobre el exe de las abscisas los puntos P,P′,P″ (fig. 180) distantes entre sí una misma cantidad k, se tendrá

$$AP=x,\ AP'=x+k,\ AP''=x+2k,\ \&c.$$

y si se levantan las ordenadas correspondientes PM.P′M′.P″M″.&c. y se unen los puntos M, M′.M″,&c. por cuerdas, se formará el polígono MM′M″ &c. que se diferenciará tanto menos de la curva propuesta, quanto mas próxîmos se hallen entre sí los puntos M.M′.M″&c.; pero al mismo tiempo el número de sus lados aumentará mas y mas, pues que la distancia PP′ estará contenida un número de veces mayor en la abscisa determinada AB. Por lo que la curva CD será el límite de todos estos polígonos, y por consiguiente las propiedades que convengan á este límite convendrán á la curva propuesta (*).

(*) *Leibnitz ha considerado siempre el cálculo diferencial baxo un punto de vista casi semejante; y paraque se vea que tubo mejores ideas acerca de este punto, que todos los que han tratado despues el*

584 Esto supuesto, si se tiran MQ y $M'Q'$ paralelas al exe AB, $M'Q$ será la diferencia de las dos ordenadas consecutivas PM y $P'M'$, $M''Q'$ la de las ordenadas $P'M'$ y $P''M''$. Prolongando la recta MM' hasta que encuentre en N'' á la $P''M''$ se tendrán los triángulos $MM'Q$, $M'N''Q'$ que serán totalmente iguales, por tener $MQ=M'Q'$ por el supuesto de ser $PP'=P'P''$, y de tener ademas iguales los ángulos adyacentes, los en Q y Q' por rectos, y los en M y M' por correspondientes; luego será $M'Q=N''Q'$,

de donde se sigue que $M''N''=N''Q'-M''Q'$

será la diferencia de las lineas $M'Q$ y $M''Q'$.

El cálculo diferencial da la expresion de estas diversas rectas, porque se tiene sucesivamente [§ 535],

---

cálculo diferencial por los infinitamente pequeños, pondremos aqui el siguiente pasage de las Actas de Leipsick año de 1684.

« *Habiendo publicado Juan Cristoval Esturmio, Matemático muy* « *erudito, en las Actas del mes de Marzo próxîmo pasado un método* « *por el qual se demuestran las dimensiones de las figuras, dadas por* « *Euclides, Arquimedes y otros, mas directa y compendiosamente que* « *se suele hacer comunmente, á saber, reduciéndolas á series infini-* « *tas con la continua circunscripcion de abscisas, ó con la biseccion de* « *las partes del exe, y unas figuras siempre paralelogramos y otras* « *(que tenian por altura las partes del exe y por base las ordenadas),* « *y deseando saber en particular mi parecer y el de otros Geómetras* « *acerca de este asunto, juzgué que me correspondia el exponer en* « *pocas palabras mi parecer, aunque con mas seriedad que acaso lo hu-* « *biera hecho, si hubiera advertido antes aquel lugar de las Actas. Y* « *á la verdad no puedo menos de confesar que este método es bueno y* « *laudable. Pero soy de parecer que tanto este como todos los que se* « *han empleado hasta ahora, se pueden deducir de mi principio ge-* « *neral de la medicion de las figuras curvilineas, que* una figura cur- « vilinea se debe juzgar que equivale á un polígono de infinitos lados; « *de donde se sigue que lo que se puede demostrar de semejante polí-* « *gono, ya de modo que no se tenga ningun respecto al número de sus* « *lados, ó ya de modo que se verifique tanto mejor, quanto mayor se* « *tome el número de lados, de suerte que el error sea por último menor* « *que qualquiera dado, esto mismo se puede pronunciar de la curva.* « *De donde nacen dos especies de métodos, de los quales depende, se-* « *gun mi parecer, no solo quanto hasta el presente se ha inventado* « *acerca de la dimension de las figuras curvilineas, sino tambien quan-* « *to en lo sucesivo se puede inventar. Y esto hasta ahora no lo hallo* « *bastante considerado.* »

$$PM = z$$

$$P'M' = z + \frac{dz}{dx} \times \frac{k}{1} + \frac{d^2z}{dx^2} \times \frac{k^2}{1 \times 2} + \frac{d^3z}{dx^3} \times \frac{k^3}{1 \times 2 \times 3} + \&c.$$

$$P''M'' = z + \frac{dz}{dx} \times \frac{2k}{1} + \frac{d^2z}{dx^2} \times \frac{4k^2}{1 \times 2} + \frac{d^3z}{dx^3} \times \frac{8k^3}{1 \times 2 \times 3} + \&c.$$

$$P'M' - PM = M'Q = \frac{dz}{dx} \times \frac{k}{1} + \frac{d^2z}{dx^2} \times \frac{k^2}{1 \times 2} + \frac{d^3z}{dx^3} \times \frac{k^3}{1 \times 2 \times 3} + \&c.$$

$$P''M'' - P'M' = M''Q' = \frac{dz}{dx} \times \frac{k}{1} + \frac{d^2z}{dx^2} \times \frac{3k^2}{1 \times 2} + \frac{d^3z}{dx^3} \times \frac{7k^3}{1 \times 2 \times 3} + \&c.$$

$$M''Q' - M'Q = M''N'' = \frac{d^2z}{dx^2} \times \frac{2k^2}{1 \times 2} + \frac{d^3z}{dx^3} \times \frac{6k^3}{1 \times 2 \times 3} + \&c.$$

De donde se sigue que si k ó Δx se aproxîmara á su límite dx, el valor de $M'Q$ se aproxîmaria mas y mas á la diferencial primera dz, y el de $M''N''$ á la diferencial segunda d^2z. Considerando un quarto punto del polígono, se hallaria del mismo modo la linea correspondiente á la diferencial tercera, &c.

585 *Las lineas* PM, M'Q, M''N'', *tienen con relacion al cálculo de los límites una subordinacion señalada por los exponentes de que el incremento* k *está afecto en su primer término; pues es el mismo que el del órden de la diferencial á que corresponden.*

En efecto, la relacion de $M'Q$ á PM disminuye sin cesar y acaba por desvanecerse quando $k=0$, y sucede lo mismo á la relacion de $M''N''$ con $M'Q$; pero si se comparase $M''N''$ con el quadrado de $M'Q$, la relacion tendria entonces un límite asignable que seria la relacion de

$$\frac{d^2z}{dx^2} \text{ á } \frac{dz^2}{dx^2} \; (*).$$

586 Las consideraciones del artículo [582] hacen conocer tambien la posicion de la tangente; porque dan (fig. 179) $\frac{PM}{PT} = \frac{dz}{dx}$, y el triángulo PMT siendo rectángulo en P, la relacion $\frac{PM}{PT}$ expresa la

(*) *Esto suministra una explicacion bastante sencilla de los diferentes órdenes de infinitamente pequeños que Leibnitz admitia. El consideraba á la diferencial primera como infinitamente pequeña con relacion á la ordenada; la diferencial segunda como infinitamente pequeña con relacion á la diferencial primera, y así en adelante. Por este principio despreciaba las unas con relacion á las otras; lo que es necesario hacer en efecto quando se quiere pasar á los límites.*

tangente del ángulo PTM; *luego* $\frac{dz}{dx}$ *es la tangente trigonométrica del ángulo que la tangente de la curva en un punto qualquiera forma con el exe de las abscisas.*

587 El triángulo PMT siendo rectángulo en P, da la tangente ó

$$MT=\sqrt{PM^2+PT^2}=\sqrt{z^2+\frac{z^2dx^2}{dz^2}}=z\sqrt{1+\frac{dx^2}{dz^2}}.$$

Si suponemos que MR sea normal de la curva, el triángulo TMR será rectángulo en M; y como desde M tenemos baxada la perpendicular MP resultará que los triángulos TPM, PMR serán semejantes, y darán

$$PT:PM::PM:PR=\frac{PM^2}{PT}=\frac{z^2}{\frac{zdx}{dz}}=\frac{zdz}{dx}$$

que es el valor de la subnormal de toda curva.

589 El triángulo PMR rectángulo en P da para la normal

$$MR=\sqrt{PM^2+PR^2}=\sqrt{z^2+\frac{z^2dz^2}{dx^2}}=z\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}.$$

590 De estas fórmulas podemos hacer aplicaciones para determinar los valores de las subtangentes, tangentes, normales y subnormales de las curvas que hemos considerado.

Si tomamos por exemplo la equacion general de las curvas de segundo grado [§ 333] $z^2=mx+nx^2$, se tendrá diferenciando

$$2zdz=mdx+2nxdx, \text{ y } \frac{dz}{dx}=\frac{m+2nx}{2z}=\frac{m+2nx}{2\sqrt{mx+nx^2}},$$

de donde se saca $PT=\frac{zdx}{dz}=\frac{z\times2\sqrt{mx+nx^2}}{m+2nx}=\frac{2(mx+nx^2)}{m+2nx}$,

$$TM=\sqrt{z^2+\frac{z^2dx^2}{dz^2}}=\sqrt{mx+nx^2+(mx+nx^2)\left(\frac{2\sqrt{mx+nx^2}}{m+2nx}\right)^2}=$$

$$\sqrt{mx+nx^2+4\left(\frac{mx+nx^2}{m+2nx}\right)^2},$$

$$PR=\frac{zdz}{dx}=\frac{m+2nx}{2},$$

$$MR=\sqrt{z^2+\frac{z^2dz^2}{dx^2}}=\sqrt{mx+nx^2+(mx+nx^2)\left(\frac{m+2nx}{2\sqrt{mx+nx^2}}\right)^2}=$$

$$\sqrt{mx+nx^2+(mx+nx^2)\frac{(m+2nx)^2}{4(mx+nx^2)}}=\sqrt{mx+nx^2+\frac{(m+2nx)^2}{4}}$$

Quando $n=0$ la curva es una parábola, y entonces se tiene solo

$$PT=2x,\ TM=\sqrt{mx+4x^2},\ \ PR=\frac{m}{2},\ MR=\sqrt{mx+\tfrac{1}{4}m^2}.$$

Del mismo modo se podrian hacer aplicaciones á las equaciones de otras curvas qualesquiera.

591 Siendo el arco MEM′ (fig. 181) mayor que la cuerda MM′, la razon $\frac{MEM'}{MQ}$ de la diferencia del arco AM á la diferencia de la abscisa correspondiente AP, será mayor que la razon $\frac{MM'}{MQ}$ de la cuerda MM′ á MQ, ó que su igual $\frac{MS}{PS}$ á causa de los triángulos semejantes MM′Q, MPS; pero quanto mas el punto M′ se acerque á M, tanto mas la cuerda MM′ se acercará á confundirse con el arco MEM′, y por consiguiente tanto mas la primera $\frac{MEM'}{MQ}$ de estas razones se acercará á la segunda $\frac{MS}{PS}$, de manera que su diferencia llegará á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea; de donde concluiremos que el límite $\frac{MT}{PT}$ de la segunda de estas razones será igual al de la primera; luego

La razon $\frac{MT}{PT}$ *de la tangente á la subtangente de un punto qualquiera* M *de una curva, es el límite de la razon* $\frac{MEM'}{MQ}$ *de la diferencia del arco* AM *á la diferencia de la abscisa correspondiente.*

De donde se infiere que si llamamos A al arco de una curva qualquiera AF, será $\frac{dA}{dx}=\frac{MT}{PT}$; pero los triángulos semejantes TPM, MPR

dan $\frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{PT}}=\frac{\mathrm{RM}}{\mathrm{MP}}=[\S\ 589]\ \frac{z\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}}{z}=\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}$;

luego $\frac{dA}{dx}=\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}$ y $dA=dx\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}=\sqrt{dx^2+dz^2}$.

592 Dividiendo la equacion $\frac{dA}{dx}=\frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{PT}}$ por la equacion $\frac{dz}{dx}=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PT}}$,

será $\frac{\frac{dA}{dx}}{\frac{dz}{dx}}$ ó $\frac{dA}{dz}=\frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{PM}}=\frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{PR}}$,

esto es, la razon de la tangente con la ordenada ó de la normal con la subnormal de una linea curva, es el límite de la razon de la diferencia del arco á la diferencia de la ordenada.

593 El triángulo rectángulo MPR,

da $R=1:\mathrm{MR}::\mathrm{sen.PRM}:\mathrm{PM}::\mathrm{cos.PRM}:\mathrm{RP}$,

de donde sale sen. $\mathrm{PRM}=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{MR}}=\frac{\mathrm{PT}}{\mathrm{MT}}=\frac{dx}{dA}$ y cos. $\mathrm{PRM}=\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{MR}}=\frac{dz}{dA}$.

594 Muchas veces es mas cómodo y elegante el considerar la tangente y la normal por su equacion. Para obtener la de la primera buscaremos en general las relaciones que deben verificarse quando dos lineas se tocan. Consideremos al principio estas lineas como teniendo dos puntos M y M′ (fig. 181) comunes; y tendremos que las equaciones de estas lineas deberán dar los mismos valores de la ordenada PM, y de la diferencia M′Q, correspondientes á la abscisa comun AP y á su incremento correspondiente PP′. Luego si se designan por x', z' las coordenadas particulares del punto M en la curva propuesta, y por x, z las de los puntos qualesquiera de la linea que la corta en M y en M′, se tendrá [§ 584] para estos dos puntos

$$z=z',\ \frac{dz}{dx}\times k+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times 2}+\&c.=\frac{dz'}{dx'}\times k+\frac{d^2z'}{dx'^2}\times\frac{k^2}{1\times 2}+\&c.$$

La segunda equacion dividida por k da

$$\frac{dz}{dx}+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k}{1\times 2}+\&c.=\frac{dz'}{dx'}+\frac{d^2z'}{dx'^2}\times\frac{k}{1\times 2}+\&c.$$

que pasando al límite, suponiendo $k=0$, se reduce á $\frac{dz}{dx}=\frac{dz'}{dx'}$;

pero en esta hipótesis los dos puntos de interseccion M,M′ se reunen en uno solo que se convierte en un punto de contacto para las lineas propuestas, pues que no tienen mas que este punto comun. De donde se sigue que paraque dos lineas se toquen es indispensable que se verifiquen las equaciones $z=z'$, $\frac{dz}{dx}=\frac{dz'}{dx'}$.

595 Apliquemos esto á la linea recta cuya equacion es $z=ax+b$, que da $\frac{dz}{dx}=a$,

y tendremos para el contacto de esta recta con la curva propuesta

$$z'=ax'+b, a=\frac{dz'}{dx'},$$

de donde sacaremos $b=z'-x'\frac{dz'}{dx'}$, y $z=\frac{dz'}{dx'}x+z'-x'\frac{dz'}{dx'}$,

que da $z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x')$,

que es la equacion de la tangente de una curva en el punto cuyas coordenadas son x',z'.

Como la normal ha de ser perpendicular á la tangente, su equacion convirtiendo a en $-\frac{1}{a}$ será $z-z'=-\frac{dx'}{dz'}(x-x')$.

Tomemos por exemplo el círculo representado por la equacion $z'^2+x'^2=a^2$, y tendremos $\frac{dz'}{dx'}=-\frac{x'}{z'}$;

la equacion de su tangente será por consiguiente $z-z'=-\frac{x'}{z'}(x-x')$

ó $z'z-z'^2=-xx'+x'^2$, ó $zz'+xx'=z'^2+x'^2=a^2$,
que es la misma que hallámos en la aplicacion del Álgebra á la Geometría.

La equacion de la normal será $z-z'=\frac{z'}{x'}(x-x')$

que se convierte en $z=\frac{z'}{x'}x$,

y da á conocer *que las normales del círculo pasan por su centro* que es aqui el orígen de las coordenadas; lo que debe ser en efecto pues que las normales de un círculo no son otra cosa que sus radios.

596 Si nos propusiésemos tirar una tangente á una curva por un punto dado tomado fuera de esta curva, y cuya abscisa fuese α y su ordenada

β', substituiríamos en la equacion de la tangente α en vez de x, y β en vez de z, y resultaria $\beta - z' = \frac{dz'}{dx'}(\alpha - x')$;

y serviria junto con la equacion de la curva propuesta para determinar las coordenadas x' y z' del punto de contacto.

597 Para tirar una recta que toque á una curva dada, y que sea al mismo tiempo paralela á una recta dada de posicion, ó que forme con el exe de las abscisas un ángulo cuya tangente trigonométrica esté representada por a, bastará hacer $\frac{dz'}{dx'} = a$; combinando esta equacion con la de la curva propuesta se determinarán los valores de x' y de z', que corresponden al punto de contacto pedido.

En el caso en que la curva propuesta fuese la parábola ordinaria, seria

$$z'^2 = px', \frac{dz'}{dx'} = \frac{p}{2z'} = a, \text{ que daria } z' = \frac{p}{2a}, \text{ y } x' = \frac{z'^2}{p} = \frac{\frac{p^2}{4a^2}}{p} = \frac{p}{4a^2}.$$

598 En todo lo que precede hemos supuesto que las coordenadas x, z eran perpendiculares entre sí; pero todo esto conviene igualmente al caso en que forman un ángulo qualquiera; pues la relacion de M'Q á MQ (fig. 182) tendria aun por límite la de PM á PT, y la expresion de la subtangente no mudaria de forma. Respecto de MT, MR y PR se hallarian sus expresiones por medio de los triángulos MPT, MTR y MPR, en los quales se conoceria siempre ó un ángulo y dos lados, ó dos ángulos y un lado.

599 Al buscar las posiciones que toma la tangente de una curva propuesta quando el punto de contacto se aleja mas y mas del orígen de las coordenadas, se puede reconocer si esta curva tiene, como la hipérbola, lineas rectas por asíntotas, y determinar su posicion.

Quando las asíntotas rectilineas de las lineas curvas son paralelas á alguno de los exes de las coordenadas, se determinan facilmente sin el auxîlio del cálculo diferencial.

En efecto, supongamos que la linea BE (fig. 183) paralela al exe AD sea una asíntota de la curva AMC; quanto mas crezca la abscisa AP tanto mas la ordenada PM se acercará á su límite PE=AB; de manera que quando x fuese infinita seria PM$=z=$AB;

por consiguiente si haciendo x infinita en la equacion de la curva AC, resulta la ordenada z igual á una cantidad finita AB, la recta BE tirada por el punto B paralelamente á AD será una asíntota de dicha curva.

Del mismo modo demostraríamos que si suponiendo z infinita en la equacion de una curva ADHd (fig. 128) resulta la abscisa x igual á una cantidad finita AB, la recta BL paralela al exe de las ordenadas será una asíntota de la curva ADHd; la qual se confundiria con el exe AH (fig. 184) si AB fuese $=0$.

Exemplo 1.º Sea MDM′ (fig. 125) la conchoide superior y mdm' la conchoide inferior. Haciendo $\pm x$ infinita en su equacion [336],

$$x^2 = \frac{(b+z)^2(a^2-z^2)}{z^2} \text{ será } z^2=0, \text{ ó } \pm z=0,$$

de donde inferiremos que el exe de las abscisas HAG es asíntota de las dos ramas DM,DM′ de la conchoide superior, y de las dos ramas dm,dm' de la conchoide inferior.

Exemplo 2.º Sea $z^2 = \dfrac{b^2x}{x+a} = \dfrac{b^2}{1+\dfrac{a}{x}}$ la equacion de la curva C′AC (fig. 183); haciendo x infinita resulta $z^2=b^2$ y $z=\pm b$; de donde inferiremos que la curva propuesta tiene por asíntotas á las rectas BE,B′E′ paralelas á la línea de las abscisas, situadas la una encima y la otra debaxo de dicho exe á una distancia $AB=AB'=b$. Las mismas rectas BE,B′E′ continuadas al otro lado del exe BB′, son igualmente asíntotas de las ramas FG,F′G′ de la curva, que caen del lado de las abscisas negativas.

Exemplo 3.º Si en la equacion $z^2 = \dfrac{x^3}{a-x}$ de la cisoide hacemos $z=\infty$ tendremos $a-x=0$ ó $x=a$; y por consiguiente la paralela BG (fig 128) al exe de las ordenadas es asíntota de las dos ramas AH,Ak de la cisoide.

600 Quando *las asíntotas son oblíquas á los exes de las coordenadas, el cálculo diferencial las determina con la mayor facilidad.*

En efecto, si la curva AC (fig. 185) tiene una asíntota BE oblíqua al exe AD, á medida que las coordenadas x,z aumentan, los puntos T,I donde la tangente MT encuentra á sus exes, se acercan continuamente á sus límites respectivos B,E, sin que puedan jamas confundirse con ellos. Por consiguiente para conocer si una curva cuya equacion es dada tiene alguna asíntota, y en caso que la tenga determinar su posicion, se determinarán los valores de AT y AI en valores de x ó z por medio de la equacion de la curva; y si haciendo x ó $z=\infty$ resultan los límites finitos AB,AE, la recta BE que pase por ellos será una asíntota de la curva AC.

Si en el supuesto de x ó $z=\infty$, solamente una de las líneas AB ó AI tubiese un límite finito AB ó AE, siendo la otra infinita, la asíntota BE sería paralela al exe de las ordenadas ó al de las abscisas; pero si ambas líneas fuesen infinitas, la curva AC no tendria asíntota ninguna.

Finalmente, si sucediese que los dos límites AB,AE (fig. 186) fuesen cero, la asíntota pasaria por el orígen A de las coordenadas; pero como en este caso solo se conoce el punto A de su direccion, para fixarla haremos x ó $z=\infty$ en la expresion $\dfrac{dz}{dx}$ que expresa la tangente del ángulo

MTD, y resultará la tangente del ángulo FAD que la asíntota forma con el exe de las abscisas.

Antes de pasar á resolver ningun caso, debemos manifestar quales son los valores generales de AT,AI, (fig. 185)

y tendremos que $AT = PT - AP = \frac{zdx}{dz} - x$,

y para AI los triángulos semejantes TAI,TPM darán

$$TP:PM::TA:AI = \frac{PM \times TA}{TP} = \frac{z\left(z\frac{dx}{dz} - x\right)}{z\frac{dx}{dz}} = z - \frac{x}{\frac{dx}{dz}} = z - \frac{xdz}{dx}.$$

Exemplo 1.° Sea la curva una hipérbola ordinaria (fig. 185). Suponiendo en A el orígen de las coordenadas, y llamando a al primer semiexe y b al segundo tendremos $z^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$, $\frac{dz}{dx} = \frac{b^2(a+x)}{a^2z}$,

$$\frac{zdx}{dz} = \frac{a^2z^2}{b^2(a+x)} = \frac{2ax+x^2}{a+x}, \quad \frac{xdz}{dx} = \frac{b^2(ax+x^2)}{a^2z};$$

$$\text{por lo que } AT = z\frac{dx}{dz} - x = \frac{2ax+x^2}{a+x} - x = \frac{ax}{a+x} = \frac{a}{\frac{a}{x}+1},$$

$$AI = z - x\frac{dz}{dx} = z - \frac{b^2(ax+x^2)}{a^2z} = \frac{a^2z^2 - b^2(ax+x^2)}{a^2z} = \ldots$$

$$\frac{2ab^2x + b^2x^2 - b^2ax - b^2x^2}{\pm ab\sqrt{2ax+x^2}} = \frac{bx}{\pm\sqrt{2ax+x^2}} = \pm\frac{b}{\sqrt{\frac{2a}{x}+1}},$$

que haciendo x infinita resultan los límites $AB = a$ y $AE = \pm b$; de donde inferiremos que la *hipérbola* CAC′ *tiene dos asíntotas* BF,BF′ que parten del centro B, y encuentran al exe de las ordenadas en los puntos E,E′, el uno encima y el otro debaxo del exe de las abscisas, á una distancia del punto A $= b =$ al segundo semiexe.

Si el orígen A de las coordenadas estubiese en el centro (f. 186) seria

$$z^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{b^2x}{a^2z}, \quad x\frac{dz}{dx} = \frac{b^2x^2}{a^2z}, \quad z\frac{dx}{dz} = \frac{a^2z^2}{b^2x},$$

$$z\frac{dx}{dz} - x = AT = \frac{a^2z^2 - b^2x^2}{b^2x} = -\frac{a^2}{x},$$

$$AI=z\mp\frac{xdz}{dx}=\frac{a^2z^2-b^2x^2}{a^2z}=\mp\frac{ab}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

y haciendo x infinita, resultará $AB=0, AI=\mp 0$; por consiguiente la curva propuesta tiene dos asíntotas que pasan por el orígen A, la una encima y la otra debaxo del exe AD.

Para determinar sus posiciones respectivas, haremos x infinita en

$$\frac{dz}{dx}=\frac{b^2x}{a^2z}=\frac{b^2x}{a^2x\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}=\pm\frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}=\pm\frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}},$$

y resultará la tangente del ángulo $FAD=\pm\frac{b}{a}$;
tomando pues las lineas GE iguales al segundo semiexe b, las rectas AE, AE serán las asíntotas de la hipérbola CAC'.

Exemplo 2.° Sea $z^n=x$ la equacion propuesta, la qual suponiendo n positiva, representa las parábolas de todos los grados y tendremos

$$\frac{dx}{dz}=nz^{n-1},\ \frac{dz}{dx}=\frac{1}{nz^{n-1}},\ \frac{zdx}{dz}=nz^n=nx,\ \frac{xdz}{dx}=\frac{z}{n}=\frac{x^{\frac{1}{n}}}{n},$$

$$z\frac{dx}{dz}-x=(n-1)x,\ z-x\frac{dz}{dx}=x^{\frac{1}{n}}-\frac{x^{\frac{1}{n}}}{n},$$

y como estas cantidades son infinitas en el supuesto de serlo x, inferimos que las parábolas de qualquier grado que sean, no tienen asíntota alguna.

601 Las máxîmas y mínimas abscisas y ordenadas se determinan por el método general de los máxîmos y mínimos; y así solo advertiremos que los puntos tales como G (fig. 167) de una curva donde la ordenada es un máxîmo ó un mínimo, se llaman *los límites de las ordenadas*, ó de la curva en la direccion de la ordenada; y los puntos tales como A, B pertenecientes al máxîmo ó mínimo de la *abscisa son los límites de las abscisas*.

De los puntos múltiplos de las lineas curvas.

602 Quando un punto de una curva no ofrece ninguna particularidad, se llama punto *sencillo*; y quando la ofrece se llama punto *singular*, como ya diximos [205] con el objeto de dar una idea general de la teoría de las lineas curvas. Quando un punto tiene la particularidad de pertenecer á muchas ramas de la curva, se llama punto *múltiplo*; si pertenece á dos como M (fig. 188) se llama punto *duplo*; si pertenece á tres, se llama *triplo* como A (fig. 189), y así sucesivamente. De donde

se infiere 1.° que toda recta (exceptuamos las tangentes, porque un punto de contacto equivale á dos intersecciones reunidas) que pasa por un punto múltiplo de una linea curva, la encuentra en dicho punto un número de veces igual al que expresa el grado de multiplicidad del punto. La recta HF encuentra v. g. tres veces ó en tres partes á la curva en el punto A, uno correspondiente á la rama BC, otro á la B′C′ y otro á la BAB′. 2.° Al punto múltiplo de una curva corresponde un número de tangentes y de subtangentes igual al número que expresa su multiplicidad; por exemplo la curva CMBC′ (fig. 188) tiene en el punto duplo M dos tangentes MT, MT′ y las dos subtangentes correspondientes PT, PT′; la primera perteneciente á una de las ramas y la otra á la otra. 3.° Por consiguiente el límite $\frac{dz}{dx}$ tendrá necesariamente dos valores en el punto duplo M, uno correspondiente al ángulo MTP que la tangente en el punto M de la rama CMB forma con el exe de las abscisas: y el otro correspondiente al ángulo MT′P que la tangente MT′ forma con el mismo exe. En el punto triplo tendrá $\frac{dz}{dx}$ tres valores correspondientes á los tres ángulos que las tangentes respectivas de las tres ramas que pasan por dicho punto forman con el exe AD, &c. 4.° Luego en el punto duplo, el límite $\frac{dz}{dx}$ será dado por una equacion de segundo grado: en el punto triplo por una equacion de tercero; y en general representando n el grado de la multiplicidad de un punto, la equacion que expresa el valor del límite $\frac{dz}{dx}$ relativa á dicho punto será del grado n.

De donde se sigue que puesto que la equacion

$$A\Delta x+B\Delta z+C\Delta x^2+D\Delta x\Delta z+E\Delta z^2+\&c.=0$$

expresa la relacion entre las diferencias de las coordenadas de una curva; y $\frac{dz}{dx}=-\frac{A}{B}$ el límite de la razon de dichas diferencias; los valores de x y de z correspondientes al punto duplo, harán $A=0$ y $B=0$, y el límite $\frac{dz}{dx}$ será dado por la equacion $E\frac{dz^2}{dx^2}+D\frac{dz}{dx}+C+\&c.=0$. Los que corresponden al punto triplo reducirán á cero A, B, C, D, E, y $\frac{dz}{dx}$ será dado por la equacion $I\frac{dz^3}{dx^3}+H\frac{dz^2}{dx^2}+G\frac{dz}{dx}+F=0$, &c.

y recíprocamente, si cierto valor de la abscisa x y el correspondiente de z, hacen desaparecer A y B en cuyo caso será $\frac{dz}{dx}=\frac{0}{0}$, el punto

indicado por este valor de las coordenadas será múltiplo; á saber, duplo si solo desaparecen A y B; triplo si se reducen á cero A,B,C,D,E; y en general el grado de la multiplicidad de dicho punto será el mismo que el grado de la equacion que expresa el valor del límite $\frac{dz}{dx}$.

5.° Una linea curva tiene tantos puntos múltiplos, como valores diferentes de x, que con los correspondientes de z reducen el límite $\frac{dz}{dx}$ á $\frac{0}{0}$. Por valores diferentes de x se deben entender 1.° los valores desiguales; 2.° los valores iguales y de signos diferentes; y 3.° los valores iguales y del mismo signo correspondientes á diferentes ordenadas.

603 En virtud de esto será fácil conocer si una curva dada tiene puntos múltiplos, y en caso que los tenga quál es el grado de multiplicidad de cada uno de ellos, y los valores de x y de z que les corresponden. Para conseguirlo, representando por $f.(x,z)=0$ la equacion de la curva y por $B\frac{dz}{dx}+A=0$ su diferencial, haremos $A=0, B=0$; y substituiremos en la equacion $f.(x,z)=0$ los valores de x y los correspondientes de z que dan estas equaciones; la curva propuesta tendrá un número de puntos múltiplos igual al de los valores de x que con los correspondientes de z satisfagan á la equacion $f.(x.z)=0$.

Para conocer el grado de multiplicidad de uno qualquiera de dichos puntos, diferenciaremos la equacion $B\frac{dz}{dx}+A=0$ ó $\frac{dz}{dx}=-\frac{A}{B}=\frac{0}{0}$ considerando $\frac{dz}{dx}$ como constante, y substituiremos en la equacion que resulte el valor de x y de z: si alguno de los coeficientes C,D,E no desaparece, el punto será duplo; pero si todos tres se reducen á cero, el límite $\frac{dz}{dx}$ será dado por una equacion de un grado superior al segundo, y por consiguiente el punto de que se trata será mas que duplo. En este caso, volveremos á diferenciar la equacion, y si los valores no satisfacen á esta equacion el punto será triplo, si satisfacen será mas que triplo.

En general, la equacion $B\frac{dz}{dx}+A=0$ se debe diferenciar sucesivamente, considerando constante el límite $\frac{dz}{dx}$ hasta encontrar una que no se desvanezca enteramente, substituyendo en ella el valor de x y el correspondiente de z; y el grado de multiplicidad del punto será igual al grado de dicha equacion.

Sea $a(z-b)^2-x(x-a)^2=0$ la equacion de la curva propuesta [fig. 188] y tendremos $2a(z-b)dz-(x-a)^2dx-2x(x-a)dx=0$ (1), que igualando con cero los coeficientes de dz y dx se tendrá $2a(z-b)=0$ que da $z=b$,

$$-(x-a)^2-2x(x-a)=0 \text{ que da } \left\{\begin{array}{l} x-a=0 \\ \\ x-a+2x=0 \end{array}\right\} \text{ó } \begin{array}{l} x=a \\ x=\frac{a}{3} \end{array}$$

y como de estos valores solo los $x=a, z=b$ satisfacen la condicion cifrada en la equacion de la curva, que es el reducirla á cero, inferimos que esta curva solo tiene un punto múltiplo que es quando $x=a, z=b$.

Diferenciando la equacion, considerando constante á dz y á dx, será

$$2dz^2-2(x-a)dx^2-2xdx^2-2(x-a)dx^2=0,$$

y como substituyendo en ella en vez de z y x sus valores queda

$$2adz^2-2adx^2=0,$$

que no se reduce á cero, resulta que el punto es duplo. Ahora nos falta determinar la posicion de las tangentes, para lo qual despejaremos $\frac{dz^2}{dx^2}$ y será $\frac{dz^2}{dx^2}=\frac{2a}{2a}=1$ de donde $\frac{dz}{dx}=\pm 1$; que indica que las tangentes forman con el exe de las abscisas un ángulo cuya tangente trigonométrica es igual al radio, ó lo que es lo mismo, el ángulo será de 45° ó $\frac{1}{4}\pi$; y si quisiéramos tirarlas lo executaríamos baxando la ordenada MP, y tomando PT y PT′ iguales con MP, se tirarán las MT, MT′ que serán las tangentes.

Exemplo 2.° Sea la equacion de la curva propuesta $x^4-azx^2+bz^3=0$; diferenciando tendremos $(3bz^2-ax^2)\frac{dz}{dx}+4x^3-2axz=0$; y resultarán las tres equaciones

$$4x^3-2axz=0,\ 3bz^2-ax^2=0,\ x^4-azx^2+bz^3=0.$$

La primera da $x=0$ y $x=\pm\sqrt{\frac{az}{2}}$, cuyos valores substituidos en la segunda la trasforman respectivamente en $z=0, 3bz^2-\frac{a^2z}{2}=0$; y como los valores $x=0, z=0$ satisfacen á la 3.ª, podemos afirmar que la curva tiene un punto múltiplo A (f. 189), correspondiente á $x=0, z=0$, esto es, en el orígen. La equacion $3bz^2-\frac{a^2z}{2}=0$ da $z=0, z=\frac{a^2}{6b}$;

pero como el segundo de estos valores junto con el de $x=\pm\sqrt{\frac{a^3}{12b}}$, no satisface á la equacion de la curva propuesta, inferiremos que esta no tiene mas de un punto múltiplo, y es el de orígen. Para conocer el grado de multiplicidad, diferenciaremos la equacion $(3bz^2-ax^2)\frac{dz}{dx}+4x^3-2axz=0$ considerando á $\frac{dz}{dx}$ como constante, y resultará la equacion $6bz\frac{dz^2}{dx^2}-4ax\frac{dz}{dx}+12x^2-2az=0$, que se desvanece en el supuesto de $x=0, z=0$; luego tendremos que volverla á diferenciar y resultará $6b\frac{dz^3}{dx^3}-6a\frac{dz}{dx}+24x=0$, cuya equacion á causa de $x=0$ se reduce á $6b\frac{dz^3}{dx^3}-6a\frac{dz}{dx}=0$, y por consiguiente el punto A será triplo.

Ahora, si quisiéramos tirarle las tangentes, hallaríamos los valores de $\frac{dz}{dx}$ de esta equacion, y tendríamos en primer lugar $\frac{dz}{dx}=0$, lo que dice que la una de las tangentes no forma ningun ángulo con el exe de las abscisas; y como el punto no dista nada de dicho exe resulta que el mismo exe es tangente de una de las ramas.

Despues de dividida la equacion por $\frac{dz}{dx}$ se queda reducida á $6b\frac{dz^2}{dx^2}-6a=0$ lo que da $\frac{dz^2}{dx^2}=\frac{6a}{6b}=\frac{a}{b}$,

$$y\ \frac{dz}{dx}=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}=\pm\sqrt{1\times\frac{a}{b}};$$

luego no habria mas que construir esta media proporcional y colocarla á la distancia 1 del orígen, y por su extremo y dicho orígen tirar una linea que seria la tangente. Quando los valores de $\frac{dz}{dx}$ que suministra la última equacion son imaginarios, entonces todas las ramas que convienen al punto múltiplo se reducen á un punto que es tambien invisible, y se llama entonces *conjugado*.

De los puntos de inflexîon y de retroceso.

604 Quando el coeficiente diferencial $\frac{dz}{dx}$ que expresa la tangente trigonométrica del ángulo MTP (fig. 179), es nulo, se sigue que la recta que toca á la curva en el punto M (fig. 190,191) es paralela al exe de las abscisas; y si muda de signo despues de este punto, la tangente se inclina entonces al lado de la ordenada opuesta á aquel á que se inclinaba antes; y por lo mismo la ordenada, despues de haber llegado á un cierto valor, debe disminuir (fig. 190), ó bien despues de haber disminuido hasta cierto punto, debe volver á crecer (fig. 191).

La primera circunstancia conviene á un valor *máxîmo* de la ordenada, y la segunda á un *mínimo*. Luego tanto quando hay máxîmo como quando hay mínimo se debe verificar que $\frac{dz}{dx}=0$, como hemos hecho ver [§ 565] antes por consideraciones analíticas.

Más alli diximos que no siempre que se verificase que $\frac{dz}{dx}=0$, habria máxîmo ó mínimo, que es lo que vamos á hacer ver por consideraciones geométricas. En efecto, aunque la tangente en el punto M (fig. 192) sea paralela al exe de las abscisas, no por esto en este punto es la ordenada un máxîmo, porque mas alla de él continúa creciendo; pero en este caso debemos notar que la concavidad de la curva, al principio vuelta hácia el exe de las abscisas ó colocada por la parte interior de su tangente, se halla vuelta despues hácia el lado opuesto. Por esta causa se ha dado al punto M, en que la concavidad de una curva se muda en convexìdad, el nombre de punto de *inflexîon*.

De donde se deduce que para conocer este punto basta determinar la posicion de la curva con relacion á su tangente, antes y despues de dicho punto.

La equacion de la tangente siendo en general [§ 595],

$$z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x'),$$

se tendrá haciendo $x=x'+k$, $z-z'=\frac{dz'}{dx'}k$ ó $z=z'+\frac{dz'}{dx'}k$

para la expresion de P'N' (fig. 193) que es la ordenada de la tangente correspondiente al punto P', cuya abscisa es $x'+k$; más, pues que z' es una funcion de x', se tendrá para P'M' esta serie [§ 535],

$$z'+\frac{dz'}{dx'}\times\frac{k}{1}+\frac{d^2z'}{dx'^2}\times\frac{k^2}{1\times2}+\frac{d^3z'}{dx'^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\&c.\ (\alpha);$$

de donde se concluirá

$$P'M'-P'N'=\frac{d^2z'}{dx'^2}\times\frac{k^2}{1\times2}+\frac{d^3z'}{dx'^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\&c.\ (\beta);$$

tomando ahora sobre el exe de las abscisas un punto $'P$ que anteceda á P, y cuya abscisa sea $x'-k$ se hallaria igualmente

$$'P'M-'P'N=\frac{d^2z'}{dx'^2}\times\frac{k^2}{1\times2}-\frac{d^3z'}{dx'^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\&c.\ (\gamma);$$

y si se verificase que $\frac{d^2z'}{dx'^2}=0$, las dos diferencias se convertirian en

$$P'M'-P'N'=\frac{d^3z'}{dx'^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\&c.\quad 'P'M-'P'N=-\frac{d^3z'}{dx'^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\&c.$$

que serán de signos contrarios en las inmediaciones del punto M, por quanto podemos hacer á k bastante pequeña [§ 431] paraque el primer término sea mayor que la suma de todos los que le siguen; luego en este caso la curva propuesta, despues de haber estado debaxo de la tangente pasará por la parte superior y *vice-versa.*

Luego en el punto M (fig. 192) habrá inflexîon y no *máximo ó mínimo*, si $\frac{d^2z'}{dx'^2}$ es cero al mismo tiempo que $\frac{dz'}{dx'}$; y en general si el primero de los coeficientes diferenciales que no desaparece es de un órden ímpar; lo que es la significacion geométrica de los caractéres analíticos indicados [§ 565].

605 Tambien puede haber inflexîon en puntos en que la tangente no sea paralela al exe de las abscisas, y donde no se tenga por consiguiente $\frac{dz'}{dx'}=0$. En este último caso se reconoce tambien si hay inflexîon, observando que *el signo del coeficiente* $\frac{d^2z'}{dx'^2}$, *es el que determina en general como se halla la concavidad de la curva colocada respecto del exe de las abscisas.* En efecto, si $\frac{d^2z'}{dx'^2}$ es positivo, la expresion (β) manifiesta que la tangente está comprendida entre la curva y el exe de las abscisas en las inmediaciones del punto M, luego es convexâ respecto de dicho exe; y si es negativo, la expresion (γ) manifiesta que la curva estará entre la tangente y el exe de las abscisas; por lo qual será cóncava respecto de dicho exe en las inmediaciones de dicho punto. De donde se deduce que paraque haya inflexîon es necesario que en las inmediaciones del punto M, tenga $\frac{d^2z'}{dx'^2}$ diferente signo hácia la izquierda que

el que tiene hácia la derecha. Pero una cantidad variable no puede mudar de signo, á menos que no tenga un valor intermedio que sea [I. 330], cero ó infinito, luego paraque haya inflexîon es necesario que $\frac{d^2z'}{dx'^2}$ sea cero ó infinito; pero no siempre que $\frac{d^2z'}{dx'^2}$ sea $=0$ ó ∞ se verificará que lo haya, sino se verifica que los valores que se deduzcan para las coordenadas sean tales que hagan variar de signo á $\frac{d^2z'}{dx'^2}$, antes y despues de dicho punto.

Luego para averiguar si una curva tiene punto de inflexîon se hallará el valor de $\frac{d^2z}{dx^2}$, *este se hará igual con cero ó infinito; los valores que suministre esta equacion para la abscisa se deberán substituir aumentados y disminuidos de una cantidad qualquiera en* $\frac{d^2z}{dx^2}$; *y si de estas substituciones resultan signos diferentes, hay inflexîon en el punto correspondiente á aquella abscisa.*

Para hacer aplicacion de esta regla, nos propondremos averiguar si la curva AIC (fig. 194) cuya equacion es es $z=ax^3-x^4$ tiene algun punto de inflexîon. Y diferenciando será $\frac{dz}{dx}=3ax^2-4x^3$, $\frac{d^2z}{dx^2}=6ax-12x^2$, cuyo valor igualado con cero da para x estos dos valores $x=0, x=\frac{a}{2}$.

Para ver si corresponden á puntos de inflexîon, substituiremos $0\pm k$ en vez de x en la expresion $6ax-12x^2$,

y se nos convertirá en $\pm 6ak-12k^2$;

que siendo k bastante pequeña paraque el primer término sea mayor que el segundo, manifiesta que será positiva esta cantidad quando k, y negativa quando ella; por lo qual se deduce que quando $x=0$, que es en el orígen, hay inflexîon.

Substituyendo $\frac{a}{2}\pm k$ en vez de x, la expresion $6ax-12x^2$

se nos convertirá en $\mp 12ak-12k^2$,

que en el supuesto de ser k bastante pequeña, tendrá el signo que le demos á k, y por lo mismo habrá tambien inflexîon quando $x=\frac{a}{2}$.

696 Quando dos arcos RA, RC (fig. 195, 196) de una linea curva que se tocan en el punto R, y tienen por consiguiente una tangente comun

RB, terminan en el punto de contacto R, se llama este punto, punto de *retroceso*; y puede ser de dos especies: quando los arcos RMA, RC (fig. 195) se vuelven sus convexîdades, se llama de la *primera especie*; y quando las concavidades estan respecto de un mismo lado como (fig. 196) se llama de *segunda especie*.

De aqui se deduce 1.º que el punto de retroceso es un punto duplo, y por consiguiente el límite $\frac{dz}{dx}$ será dado por una equacion de segundo grado; pero como el ángulo RBD que la tangente en el punto R forma con el exe de las abscisas, es comun á las dos ramas RM, RC, las dos raices de dicha equacion serán iguales.

2.º Y recíprocamente, si las dos raices de la equacion que da el valor del límite $\frac{dz}{dx}$, perteneciente á un punto R, son iguales, y ademas las dos ramas se terminan en dicho punto R, será este un punto de retroceso.

Para distinguir si este punto es de la primera ó segunda especie, se determinará el valor de $\frac{d^2z}{dx^2}$, y si los dos valores de esta expresion en las inmediaciones del punto R, fuesen de signo contrario, el retroceso será de la primera especie; pero si ambos fuesen de un mismo signo, el punto de retroceso R pertenecerá á la segunda especie.

Exemplo 1.º Sea la curva CAC′ (fig. 197) la segunda parábola cúbica, cuya equacion, suponiendo el parámetro igual con 1 y trastornando los exes, es $z^2=x^3$, y tendremos $2z\frac{dz}{dx}=3x^2$, ó $2z\frac{dz}{dx}-3x^2=0$,

que da $3x^2=0$, y $2z=0$. de donde $x=\pm 0$, y $z=0$;

y como estos valores de x y de z satisfacen á la equacion $z^2=x^3$, inferimos que hay punto múltiplo; para averiguar el grado de multiplicidad, volveremos á diferenciar y será $2\frac{dz^2}{dx^2}-6x=0$,

que como no se desvanece, suponiendo x y z iguales con cero, resulta que el punto es duplo; pero suponiendo $x=0$ resultan para $\frac{dz}{dx}$ dos valores iguales tambien con cero, luego el punto este es de retroceso.

Como la equacion de la curva da $z=\pm\sqrt{x^3}$,

indica que el retroceso es de la primera especie; y lo mismo indica la expresion de $\frac{d^2z}{dx^2}$, pues siendo $\frac{dz}{dx}=\pm\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$,

resulta $\frac{d^2z}{dx^2}=\pm\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\pm\frac{3}{4x^{\frac{1}{2}}}$;

y por consiguiente á causa del signo diferente de los valores de $\frac{d^2z}{dx^2}$, el punto de retroceso A será de la primera especie.

De la curvatura de las lineas en sus diferentes puntos, del radio de curvatura y de las evolutas.

607 Hemos dicho [I. 340] que de dos ó mas curvas que insisten sobre una misma recta, es mas curva aquella que mas se separa de la recta; de donde se deduce que en general para formar idea de la curvatura de una curva en diferentes parages ó de diferentes curvas, no hay mas que tomar en ambas una parte que tenga una misma cuerda, y viendo qual es la que se desvia mas de esta linea recta, hallaremos que esta será la mas curva. Pero como no siempre los arcos de una misma ó de diferentes curvas que tubiesen una misma cuerda, hecha la superposicion de las cuerdas, quedaria el un arco dentro del otro, sino que las mas veces estos arcos se cortarian como los ACB, ADB (f. 198); y en este caso seria muy dificultoso averiguar qual era el mas curvo, y en caso de serlo quánto era: vamos á considerar baxo otro aspecto la curvatura.

608 En vez de comparar las curvas con sus cuerdas, *las compararemos con sus tangentes*, y *aquella que mas se separe de la tangente será la mas curva*; y así, si tenemos por exemplo las dos curvas AG, *ag* (f. 199), y concebimos en sus extremos A, *a* las tangentes AB, *ab*, la que mas se separe de su tangente en las inmediaciones del punto de contacto, será la mas curva. Considerada la curvatura baxo este aspecto, se puede distinguir mejor qual es la curva que la tiene mayor; porque si concebimos superpuesto el ángulo mixtilineo BAG sobre el *bag*, de manera que la linea AB caiga sobre la *ab*, y el punto A se confunda con el *a*, entonces si la AG por exemplo cae en *a*G′, será la mas curva por separarse mas de la tangente. Pero aunque esto se presente á los sentidos, no se puede averiguar la relacion que tienen entre sí estas curvaturas, ni tenemos, por otra parte, la expresion absoluta de la curvatura de un arco de curva; con el fin de averiguar uno y otro, recurriremos al método con que concebimos originadas las lineas.

609 Para esto recordaremos que despues de adquirida la idea del punto matemático por una serie de abstracciones hechas, principiando desde el cuerpo físico que percibimos con nuestros sentidos, podemos considerar la linea como originada del movimiento de un punto; la superficie del movimiento de una linea; y el volúmen ó el cuerpo geométrico del movimiento de una superficie. Y así, si consideramos que el punto A (fig. 200) se mueve siempre en una misma direccion hácia otro punto tal como B, la linea AB que describa en su movimiento será recta;

pero si el punto A principia á moverse desde A en la direcion Aa (f. 201) y al llegar á B varía de direccion y toma la Bb, y en llegando á C toma otra direccion tal como Cc y así sucesivamente, el punto A trazará un polígono ABCDE &c.

610 *Si queremos averiguar ahora quanto se separa de la direccion primitiva* Aa, *la direccion de uno qualquiera de los lados de este polígono, no tenemos mas que prolongar dicho lado hasta que encuentre á la* Aa, *y el desvio estará representado por el ángulo externo que formen estas dos direcciones.* En efecto, quando el punto A corria por la Aa, entonces se hallaba en la direccion primitiva; y al llegar al punto B tomó la direccion BC que se separa de la primitiva el valor del ángulo aBC; al llegar á C tomó la direccion CD que se separa de la anterior el valor del ángulo bCD ó su igual c'CB, y de la primitiva Aa el valor de la suma de los dos ángulos aBC,c'CB; y como la suma de estos dos ángulos del triángulo BCc' está representada por el ángulo externo ac'C, resulta que el desvio de la direccion del punto quando andaba la CD está representado por el ángulo ac'C; al llegar á D tomó la direccion Dd que se separa de la anterior el valor del ángulo cDd ó su igual d'Dc'; y como esta se desviaba de la primitiva el valor del ángulo ac'C, tendremos que al andar por DE, el desvio estará representado por la suma de estos dos ángulos ac'C,d'Dc' ó por el ad'D que la expresa; y como lo mismo demostraríamos de la direccion de otro lado qualquiera, se sigue que *para formarse idea del desvio que ha padecido el punto de la direccion primitiva, hasta llegar á un lado qualquiera, basta prolongar dicho lado hasta que encuentre á la direccion con que se quiere comparar, y el ángulo externo que formen estas direcciones será el que represente dicho desvio.*

611 Si pasamos ahora á los límites, esto es, si consideramos que el punto A varía á cada instante de direccion, entonces en vez de trazar un polígono ABCDE trazará una curva AFH (fig. 202), en la que estará representada la direccion que seguia dicho punto en un parage qualquiera F por la tangente Ff, cuya direccion se separa de la primitiva Aa el valor del ángulo af'F; pero siendo este desvio el que constituye la curvatura, se sigue que *para formar idea de la curvatura de un arco qualquiera de una curva, no hay mas que tirar dos tangentes á sus extremos, y el ángulo externo que formen estas tangentes expresará la curvatura que tiene dicho arco.* Y como sabemos averiguar la relacion que tienen entre sí dos ángulos qualesquiera, se sigue que fixando de este modo la idea de la curvatura, podemos comparar entre sí las que tienen en general dos curvas qualesquiera ó dos arcos de una misma curva.

Lo mismo da contar la curvatura respecto de la tangente Aa que de la FK; porque contándola respecto de esta, queda expresada por el ángulo Kf'A que es igual con af'F por opuesto al vértice.

612 Para fixar bien la expresion de la curvatura entre dos curvas ó ramas de una misma, es necesario determinar aun mas esta significacion; pues aunque supongamos iguales los ángulos BCM,B'C'M' (fig. 203), como el segundo es producido por el desvio que ha padecido el punto al originar el arco A'M' que es mayor que el arco AM, se sigue que la variacion de direccion desde un punto á otro, será menor que en el arco AM; luego *para comparar entre sí dos curvaturas*, *necesitamos añadir que han de ser los ángulos externos que forman las tangentes tiradas á los extremos de arcos iguales de la curva*; así es, que si suponemos tomada en el arco A'M' una parte A'*m* igual con AM, y se concibe tirada la tangente *cmp*, tendremos entonces que la curvatura del arco A'*m* estará representada por el ángulo *B'cp*, menor que B'C'M' ó su igual BCM; pero el tomar arcos iguales no es tan fácil como tomar las cuerdas; y así, en vez de los arcos podremos substituir las cuerdas, y diremos que *para comparar las curvaturas de dos curvas*, *se tomarán arcos que correspondan á cuerdas iguales ó á una misma cuerda*, *se concebirán tiradas las tangentes á sus extremos*, *y los ángulos externos formados por estas tangentes serán los que se deben comparar.*

613 Quando una curva es cóncava ó convexâ siempre hácia una misma linea, entonces se dice que su curvatura es *continua*; pero quando no lo es, se dice que es *descontinua* como sucede en los puntos de inflexîon. Ademas, quando una curva en toda su longitud á arcos ó cuerdas iguales convienen ángulos de curvaturas iguales, ó ángulos de curvaturas iguales corresponden á arcos ó cuerdas iguales, entonces se dice que la curva tiene *su curvatura uniforme ó igual en todos sus puntos*; y quando no se verifica esta circunstancia se dice que varía la curvatura de la curva en sus diferentes puntos. Como la curva mas sencilla que conocemos es la circunferencia de círculo, principiaremos por ella nuestras investigaciones, demostrando que *la circunferencia de círculo es una curva de curvatura uniforme.*

En efecto, sea el círculo AB*ba* (fig. 204); si en qualquier parage tomamos dos arcos AB,*ab* iguales, estos tendrán cuerdas iguales; y si tomásemos las cuerdas iguales, estas subtenderian arcos iguales; luego aqui podemos considerar la curvatura baxo qualquier aspecto, pues el uno se deduce del otro; y así partiremos de que los arcos son iguales, y *vamos á demostrar que si por sus extremos se tiran las tangentes* BC, AC,bc,ac *los ángulos* BCP,bcp *que miden las curvaturas de estos arcos son iguales*; porque el ángulo BCP, que es igual con el CAB mas el CBA, tiene por medida el arco AB [I 453]. el *bcp* tiene por medida el arco *ab*; y como AB=*ab* por el supuesto, se tendrá PCB=*bcp*; luego las curvaturas de dichos arcos son iguales; luego la circunferencia de círculo es una curva de curvatura uniforme.

614 Tambien se verifica la recíproca, á saber, *que toda curva de*

curvatura uniforme es una circunferencia de círculo, *ó que no hay mas curva de curvatura uniforme que ella.* En efecto, si suponemos que la curva ABCDE (fig. 205) sea una curva de curvatura uniforme en todas partes, concibiendo que se toman los arcos iguales AB,BC,CD,DE,&c. y que en los extremos A,B,C,D,E,&c. esten tiradas las tangentes A*m*, *m*B*p*,*p*C*r*,*r*D*u*, vamos á demostrar que si *concebimos las perpendiculares á estas tangentes en los puntos de contacto*, *todas estas perpendiculares se reunirán en un mismo punto y serán iguales*; *y teniendo la curva* ABCDE *todos los puntos á igual distancia del punto de concurso*, *será una circunferencia de círculo.*

En efecto, por suponerse la curva de curvatura uniforme, tendremos que el ángulo *nm*B que expresa la curvatura del arco AB, será igual con el ángulo *qp*C que expresa la del arco BC, pues por el supuesto los arcos son iguales; y siendo la curvatura uniforme á arcos iguales deben corresponder ángulos de curvatura iguales; y como los triángulos *m*B*n*, *qp*C son rectángulos en B y en C, resulta que tendrán igual el otro ángulo; luego el ángulo *mn*B del primero será igual con el ángulo *pq*C del segundo. Ahora, los triángulos AO*n*,B*oq* (suponiendo que la normal *qu* encuentre á la *n*B en otro punto o diferente del O en que se encuentran las AO,*n*O) son rectángulos en A y en B, luego el tercer ángulo AO*n* del primero será igual con el tercer ángulo B*oq* del segundo. Concíbase superpuesto el triángulo *q*B*o* sobre el *n*AO de modo que el ángulo B se confunda con el ángulo en A, en lo que no habrá dificultad pues dichos ángulos son iguales; luego el lado B*q* habrá caido sobre A*n*, y B*o* sobre AO; y el otro lado no podrá tener mas de dos posiciones, ó caer sobre la *n*O ó ser paralelo á ella, pues de otro modo no podria verificarse que el ángulo *q* quedase igual con el *n*, y el *o* con el O. Pero como las tangentes B*q*, A*n* de los arcos AB,BC se han confundido en una sola, á saber en la A*n*, se sigue que como por el supuesto los arcos AB,BC tienen una misma curvatura, ó lo que es lo mismo, se separan igualmente de las tangentes tiradas á sus extremos, tambien se habrán confundido, esto es, el arco BC habrá caido sobre el AB, pues si esto no sucediese, el que estubiera mas aproxîmado á la tangente seria menos curvo, que es contra el supuesto; y como por otra parte son iguales, el punto C caerá exâctamente sobre el B; luego la *q*C*o* tendrá el punto C comun con la *n*O; luego de las dos posiciones que puede tener la *qo* con relacion á la *n*O, no pudiendo ser paralela por tener un punto comun, se confundirá con ella en toda su longitud; luego el punto *o* se habrá confundido con el O, y *q* con *n*; luego los triángulos *q*B*o*,*n*AO serán totalmente iguales, y por lo mismo AO=B*o*.

Aunque hemos demostrado que *el punto o*, *hecha la superposicion*, *se confunde con* O, *no por esto se deduce que antes de hecha se confundia.* Para demostrar esto, supongamos que se dobla la figura por el lado BO, y tendremos que como los ángulos *l*BO,*q*B*o* son rectos, la B*pq* caerá

sobre la *Bml*; y para cumplir con la circunstancia de ser el ángulo O igual con *o*, la posicion que tenga *qo* no podrá menos de ser paralela á la *l*AO ó confundirse con ella. Pero la curvatura del arco BC es la misma que la del arco AB por el supuesto, y habiéndose confundido sus tangentes, resulta que los arcos se deberán confundir; luego BC se confundirá con AB; y como BC es igual con AB, el punto C caerá exâctamente sobre el punto A, luego debiendo tener la *q*C*o* un punto comun con la *l*AO, paraque el ángulo en O sea igual con el en *o* se deberán confundir estas lineas en toda su longitud; luego el punto *o* caerá sobre el O, y BO=B*o*; luego el punto O es comun á las tres lineas AO,BO y CO, y como del mismo modo determinaríamos que CO=BO,DO=CO, EO=DO, y que el punto O era tambien comun á las lineas DO,EO, &c. se deduce que pudiendo tomar los puntos A,B,C,D,E,&c. tan próxîmos como se quiera, la curva ABCDE &c. tiene todos sus puntos á igual distancia de O; luego será una circunferencia de círculo. Esto lo hemos demostrado en el supuesto de tener la curva una curvatura uniforme, luego *todas las curvas de curvatura uniforme son círculos*; y pues que todas las curvas de curvatura uniforme son círculos, *solo la circunferencia de círculo es la que guarda una curvatura uniforme en todos sus puntos.*

615 Comparando ahora las curvaturas de dos círculos qualesquiera, demostraremos que *guardan exâctamente la relacion inversa de los radios.* En efecto, sean las dos circunferencias *abh*,ABH(fig. 206); vamos á demostrar que si suponemos el arco *ab* igual en longitud con el AB, y se conciben tiradas en sus extremos las tangentes *ad*,*bc*,AD,BC, el ángulo *dcb* que mide la curvatura del arco *ab* guarda con el DCB que expresa la curvatura del AB, la misma razon que AO con *ao*; esto es, que si el radio AO es duplo ó triplo del *ao*, el ángulo *dcb* será tambien duplo ó triplo del ángulo DCB.

Llamando G al número de grados del arco *ab*, y G' al de AB, será [I. 506]$ab=0{,}0174\&c.ao\times G$; $AB=0{,}0174\&c.AO\times G'$;

y pues que el arco *ab* es igual con el arco AB,

se tendrá $0{,}0174\&c.ao\times G=0{,}0174\&c.AO\times G'$ ó $ao\times G=AO\times G'$,

que da $G:G'::AO:ao$ (1),

que nos dice *que los números de grados de los arcos* ab,AB *estan en razon inversa de los radios* ao,AO; pero los quadriláteros *aobc*, AOBC tienen rectos los ángulos en *a*,*b*, y A,B; luego en cada uno los otros dos ángulos en *o* y en *c*, en O y en C tambien valdran juntos dos ángulos rectos, ó serán el uno suplemento del otro, y por consiguiente será el ángulo *o* suplemento del ángulo *acb*, y el en O suplemento de ACB; pero como *acb* tambien tiene por suplemento á *dcb*, resulta que el ángulo en *o* es igual al *dcb*, y por la misma razon el ángulo en O=DCB. Luego tendremos

curvat.ª círc.º abh:curvat.ª círc.º ABH::dcb:DCB::aob:AOB::G:G' porque los ángulos guardan la misma relacion que los números de grados contenidos en los arcos que abrazan; y como esta proporcion y la (1) tienen comun la razon G:G', resultará

curvatura de círculo abh: curvatura de círculo ABH::AO:ao,

que expresa que *en dos diferentes círculos las curvaturas guardan la razon inversa de los radios*

616 Por no haber mas curva de curvatura uniforme que la circunferencia de círculo, resulta que si concebimos dividido el arco AGF (fig. 202) en dos partes iguales en G, y suponemos tirada la tangente PGQ, el ángulo en P que mide la curvatura del arco AG, no será igual con el ángulo Q que mide la del GF; luego el desvio de la direccion primitiva que padecia el punto al trazar el arco GF no era el mismo que padecia al trazar el arco AG; si concebimos ahora divididos en dos partes iguales los arcos AG,GF, tendremos que en ninguno de ellos será el mismo el desvio, y continuando del mismo modo inferiremos que en cada punto del arco AGF varía dicho desvio; y como este desvio es lo que se llama curvatura, resulta *que cada punto de una rama de curva tiene diversa curvatura.*

Hasta ahora solo hemos tratado de fixar la expresion de la curvatura de un arco; para fixar la de un punto se debe indagar qué curva de las conocidas puede pasar por aquel punto, de modo que ninguna otra de su especie pueda pasar entre ellas, y entonces se dice que la curvatura de la curva propuesta es la misma que la de aquella con que la hemos comparado; esto quiere decir que para medir la curvatura de las curvas en cada uno de sus puntos, se elige la de otra curva conocida; y como solo la circunferencia de círculo es la que tiene una curvatura uniforme, se sigue que esta es la que debe servir de unidad de medida. Ademas, como la curvatura de los círculos está en razon inversa de los radios, tenemos que disminuyendo ó aumentando convenientemente el radio de un círculo podremos hacer que su curvatura sea tan grande ó tan pequeña como la de otra curva qualquiera; pues aunque hay en las curvas puntos donde la curvatura es cero, y puntos donde es infinita, y por consiguiente menor ó mayor que la de qualquier círculo dado, no obstante en el primer caso se dice que el radio de dicho círculo es infinito, y en el segundo que es cero. El círculo que se elige para esto es aquel que pasa por el punto propuesto de la curva, de modo que ningun otro círculo pueda pasar entre él y la curva en las inmediaciones del punto propuesto; á este círculo se le llama *círculo osculador ó círculo de curvatura*, y á su radio, *radio osculador ó de curvatura.*

617 Por consiguiente solo falta determinar quál es la magnitud del radio de este círculo que mide la curvatura; para lo qual ante todas cosas manifestaremos que

Si por el punto D (*fig.* 207) *de una curva qualquiera* MN *se traza*

un círculo PQ, cuyo centro R no esté en la normal DO de la curva correspondiente á aquel punto, este círculo cortará tambien á la tangente de dicha curva, y á todos los círculos cuyos centros esten en dicha normal.

Para demostrarlo observaremos que no estando por el supuesto el centro R en la normal DO, podremos tirar la RD al punto D, la qual no será perpendicular á la tangente AT de la MN, pues entonces siéndolo la DO se tendrian dos perpendiculares á una recta en un mismo punto; luego si por el punto D concebimos una linea SX perpendicular á DR, esta será tangente del círculo PQ. Ahora, por ser recto el ángulo RDX resulta que ODX que es parte suya será agudo; y por lo mismo la DX caerá dentro del ángulo ODT que es recto; y como la DT es tangente de la DN y de todos los círculos como *mn* trazados con centros tomados en la normal DO, y entre la tangente y la curva á que lo es, no puede pasar ninguna otra recta, se sigue que la DX será secante de la DN y de todos estos círculos. Luego en la inmediacion del punto D la secante estará dentro de dicha curva y de todos los círculos; pero el arco DQ está comprendido por la DX, luego con mas razon dicho arco en la inmediacion del punto D estará comprendido por todos los demas círculos y por la curva. Del mismo modo probaríamos que siendo la DS tangente del arco DP de círculo, y no pudiendo pasar entre la tangente y el arco ninguna recta, la AT debia ser secante de PDQ, y por consiguiente estar comprendida por PD en la inmediacion del punto D; y como esta linea abraza á la MD y á todos los arcos de círculo como D*m* trazados por D con centros tomados en la DO, resulta que por este lado el arco PD está fuera de la tangente AT de la curva MD y de todos los círculos trazados desde la DO.

616 De aqui se infiere que ningun círculo cuyo centro no esté en la DO puede pasar entre la curva MDN y los que tengan su centro en dicha linea. Porque el arco DQ estará comprendido por la tangente AX, la qual está dentro de todos estos círculos, y por lo mismo se separará mas de la curva que ninguno de ellos; y el arco PD estará fuera de la tangente AT, la qual contiene dentro á la curva MD y á todos los demas círculos; y por lo mismo el *centro del círculo osculador se ha de hallar en la normal de la curva que corresponda al punto de que se trata.* De donde se deduce que como el radio es normal del círculo, tanto este círculo como la curva tendrán una misma tangente, y por lo mismo el punto donde el círculo osculador encuentre á la curva será un punto de contacto; luego si suponemos referido el círculo á los mismos exes que la curva, y llamamos x,z á las coordenadas de esta, y t,u a las del círculo, se tendrá $\frac{dz}{dx}=\frac{du}{dt}$, puesto que $\frac{dz}{dx}$ expresa la tangente del ángulo que la tangente de la curva forma con el exe de las abscisas, y $\frac{du}{dt}$ el que

forma la tangente del círculo con el mismo exe, y la tangente es comun para la curva y el círculo.

619 Ahora nos falta ver *quál de los círculos cuyo centro se halle en esta normal, es el que se aproxîma tanto á la curva que ningun otro círculo pueda pasar entre él y la curva*; por lo que demostraremos que *este es el círculo que ademas de cumplir con las condiciones anteriores, satisface á la equacion* $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2u}{dt^2}$. Para esto, observaremos que si $z=f.x$ es la equacion de la curva, y $u=f.t$ la del círculo, tendremos por el teorema de Taylor

$$z'=f.(x+k)=z+\frac{dz}{dx}\times k+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{2}+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{2\times 3}+\&c.$$

$$u'=f.(t+k)=u+\frac{du}{dt}\times k+\frac{d^2u}{dt^2}\times\frac{k^2}{2}+\frac{d^3u}{dt^3}\times\frac{k^3}{2\times 3}+\&c.$$

y observando que teniendo las curvas un mismo orígen, deben ser en el punto de contacto que es comun á la curva y al círculo unas mismas las coordenadas, que por tener comun el orígen se tendrá $x=t, z=u$ ademas de la condicion de que $\frac{dz}{dx}=\frac{du}{dt}$; por lo que si restamos las series anteriores, se tendrá

$$z'-u'=\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2u}{dt^2}\right)+\frac{k^3}{2\times 3}\left(\frac{d^3z}{dx^3}-\frac{d^3u}{dt^3}\right)+\&c.$$

que expresa la diferencia entre la ordenada del círculo y de la curva á una distancia de la ordenada comun expresada por k; y todo círculo en que $\frac{d^2z}{dx^2}>\frac{d^2u}{dt^2}$ dará para $z'-u'$ un valor mayor que el del supuesto de $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2u}{dt^2}$ que hace desaparecer su primer término; luego no podrá pasar entre este y la curva; si fuese $\frac{d^2z}{dx^2}<\frac{d^2u}{dt^2}$, como podríamos dar á k un valor bastante pequeño, paraque el primer término de $z'-u'$ fuese mayor que la suma de todos los demas, resulta que el signo de $z'-u'$ dependerá del de este primer término; luego deberá ser negativo, y por lo mismo el círculo abrazará á la curva, ya se suponga á k positiva ya se suponga negativa, porque el quadrado k^2 siempre será positivo; pero el círculo en que se verifique la condicion de $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2u}{dt^2}$,

que reduce la expresion de $z'-u'$ á $\frac{k^3}{2\times3}\left(\frac{d^3z}{dx^3}-\frac{d^3u}{dt^3}\right)+$&c.

por el parage en que k sea positiva estará comprendida por la curva; y por el parage en que sea negativa comprenderá á la curva, pero estará él mismo comprendido por el círculo en que $\frac{d^2z}{dx^2}<\frac{d^2u}{dt^2}$, pues que este debe distar mas de la curva respecto de aquel, todo el valor que resulte para el término $\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2u}{dt^2}\right)$; luego en ambos casos se verifica que el círculo en que $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2u}{dt^2}$, es el que mas se aproxîma á la curva en las inmediaciones del punto en que se encuentran; luego este círculo es el *círculo osculador*.

620 Ahora, si llamamos α,β las coordenadas AK,KO del centro de un círculo mMG (fig. 208), γ á su radio MO$=m$O, y t,u á sus coordenadas Ap,pm, tendrá por equacion $(\alpha-t)^2+(\beta+u)^2=\gamma^2$ (A).

Luego si queremos determinar el círculo osculador de una curva en un punto qualquiera no tendremos mas que determinar las tres constantes α,β,γ de manera que satisfagan á las condiciones de

$$z=u,\ \frac{dz}{dx}=\frac{du}{dt},\ \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2u}{dt^2},$$

por lo que si diferenciamos la equacion (A) se tendrá

$$-2(\alpha-t)dt+2(\beta+u)du=0,$$

que da $\frac{du}{dt}=\frac{\alpha-t}{\beta+u}=\frac{dz}{dx}$, de donde $(\alpha-t)=(\beta+u)\frac{dz}{dx}$ (B);

volviendo á diferenciar, se tendrá suprimiendo el 2 que es comun

$$dt^2+du^2+(\beta+u)d^2u=0,\ \text{que da}\ \frac{d^2u}{dt^2}=-\frac{1+\frac{du^2}{dt^2}}{\beta+u}=\frac{d^2z}{dx^2},$$

de donde $\beta+u=-\frac{1+\frac{du^2}{dt^2}}{\frac{d^2z}{dx^2}}=-\frac{1+\frac{dz^2}{dx^2}}{\frac{d^2z}{dx^2}}$ (C), $\left(\text{porque}\ \frac{du}{dt}=\frac{dz}{dx}\right)$

que da $\beta = -u - \dfrac{1+\dfrac{dz^2}{dx^2}}{\dfrac{d^2z}{dx^2}} = -z - \dfrac{1+\dfrac{dz^2}{dx^2}}{\dfrac{d^2z}{dx^2}}$ (D),

la equacion (B) da

$$\alpha = t + (\beta+u)\frac{dz}{dx} = t - \frac{1+\dfrac{dz^2}{dx^2}}{\dfrac{d^2z}{dx^2}} \times \frac{dz}{dx} = x - \frac{\left(1+\dfrac{dz^2}{dx^2}\right)\dfrac{dz}{dx}}{\dfrac{d^2z}{dx^2}} \text{ (E);}$$

substituyendo en la equacion (A) el valor de $\alpha - t$, equacion (B), se tendrá $(\beta+u)^2 \dfrac{dz^2}{dx^2} + (\beta+u)^2 = \gamma^2$, ó $(\beta+u)^2\left(1+\dfrac{dz^2}{dx^2}\right) = \gamma^2$;

de donde $\gamma = (\beta+u)\left(1+\dfrac{dz^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = (C) - \dfrac{\left(1+\dfrac{dz^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2z}{dx^2}}$ (F),

equacion que expresa el valor del radio osculador de una curva qualquiera.

621 Las cantidades α,β son las coordenadas del centro del círculo osculador correspondiente al punto dado de la curva, cuyas coordenadas son x,z; luego si por medio de las equaciones (D),(E) y la de la curva, eliminamos las coordenadas x,z, tendremos una equacion en α,β y constantes; esta equacion es la de una curva, á que se llama *evoluta*, cuyas coordenadas son α,β, y que es por consiguiente el lugar geométrico de los centros de los círculos osculadores de la curva propuesta.

622 Propongámonos aplicar esta teoría á la parábola, cuya equacion es $z^2 = px$, y tendremos diferenciando $2zdz = pdx$,

de donde $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{p}{2z}$; $\dfrac{d^2z}{dx^2} = -\dfrac{p}{2z^2} \times \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{p}{2z^2} \times \dfrac{p}{2z} = -\dfrac{p^2}{4z^3}$,

cuyos valores substituidos en las equaciones (F),(E),(D),

dan $\gamma = -\dfrac{\left(1+\dfrac{p^2}{4z^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\dfrac{p^2}{4z^3}} = -\dfrac{\dfrac{(4z^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{4^{\frac{3}{2}}z^3}}{-\dfrac{p^2}{4z^3}} = \dfrac{(4z^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$;

$$\alpha = x - \frac{1+\frac{p^2}{4z^2}}{-\frac{p^2}{4z^3}} \times \frac{p}{2z} = x + \frac{\frac{4z^2+p^2}{4z^2}}{\frac{p^2}{4z^3}} \times \frac{p}{2z} = x + \frac{4z^2+p^2}{2p} \text{ (G)},$$

$$\beta = -z - \frac{1+\frac{p^2}{4z^2}}{-\frac{p^2}{4z^3}} = -z + \frac{4z^2+p^2}{4z^2} \times \frac{4z^3}{p^2} = -z + \frac{z(4z^2+p^2)}{p^2} \text{ (H)}.$$

Para hallar el punto de la evoluta correspondiente al orígen, haremos $x=0$, lo que da por la equacion de la curva $z=0$, y por lo mismo las equaciones de arriba se convertirán en $\gamma = \frac{p}{2}$, $\alpha = \frac{p}{2}$, $\beta = 0$.

La última equacion nos dice que el centro no distando nada del exe de las abscisas se halla en dicho exe, y por esta causa resulta para γ el mismo valor que para α; luego esta curva encuentra al exe de las abscisas en un punto tal como E (fig. 209) que dista del orígen de la parábola una magnitud igual á la mitad del parámetro.

Si hacemos $x = \frac{p}{4}$, como z en este supuesto es $\frac{p}{2}$, tendremos

$$\alpha = \frac{p}{4} + \frac{\frac{4p^2}{4} + p^2}{2p} = \frac{p}{4} + p = \frac{5}{4}p;\ \beta = -\frac{p}{2} + \frac{\frac{p}{2}\left(4 \times \frac{p^2}{4} + p^2\right)}{p^2} = \ldots$$

$$-\frac{p}{2} + \frac{\frac{p}{2} \times 2p^2}{p^2} = -\frac{p}{2} + p = \frac{p}{2};$$

luego si se toma en el exe una magnitud AG igual á $\frac{5}{4}p$, y desde G se tira la perpendicular GF, y en ella se toma $\mathrm{GF} = \beta = \frac{p}{2}$, el punto F será tambien punto de la curva, y continuando dando valores á x, llegaríamos á construir la curva EFD.

Para hallar la evoluta correspondiente á la rama AH, no tendremos mas que mudar los signos á la ordenada z, con lo que resultarán los valores correspondientes de α y β, el de α siempre será positivo, porque en su valor solo entra z elevada al quadrado, y el de β tomará esta

forma $\beta = z - \frac{z(4z^2+p^2)}{p^2}$ que siempre dará para β valores negativos, porque el segundo término es en todos los puntos mayor que el primero; luego se deberá tomar la β al contrario de como se consideró en la equacion (A) del círculo de curvatura, esto es, deberá tomarse sobre el exe de las abscisas, y originará la rama ED'.

623 Para sacar la equacion de esta curva eliminaremos x y z por medio de las equaciones (G),(H) y la de la curva; más con el fin de que nos resulte con mas sencillez, elegiremos por punto de orígen el punto E que lo es de la evoluta, y llamando ahora t' y u' á sus coordenadas EG,GF, será $t' = EG = AG - AE = \alpha - \frac{p}{2} = x + \frac{4px+p^2}{2p} - \frac{p}{2} =$

$$x + 2x + \frac{p}{2} - \frac{p}{2} = 3x, \text{ de donde } x = \frac{t'}{3},$$

$$\text{y } u' = \beta = -z + \frac{z(4z^2+p^2)}{p^2} = \frac{-p^2z+4z^3+p^2z}{p^2} = \frac{4z^3}{p^2} = \ldots$$

$$\frac{4\left(p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right)^3}{p^2} = \frac{4p^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}};$$

y elevando al quadrado se tendrá $u'^2 = \frac{16x^3}{p} = \frac{16\left(\frac{t'}{3}\right)^3}{p} = \frac{16t'^3}{27p}$, cuya equacion manifiesta que la evoluta de la parábola vulgar es una segunda parábola cúbica.

El radio de curvatura tiene la propiedad de ser tangente de la evoluta, y de ser igual al arco de esta curva interceptado entre el radio y el orígen, junto con la distancia del orígen de esta al de la curva dada que se llama *evolvente*; por lo qual se puede considerar la evolvente como originada del desarrollo de la evoluta. No nos detendremos mas en esto porque los lectores que deseen imponerse mas á fondo en esta teoría podrán consultar mi memoria sobre este punto, que contiene esta teoría con toda extension; y al mismo tiempo se halla tratado el asunto por los dos métodos analítico y sintético, paraque se compare el uno con el otro, y se perciba bien su espíritu.

De los coeficientes diferenciales de las superficies curvilíneas, de las superficies de los cuerpos de revolucion, y de los volúmenes de estos.

624 Hasta aqui hemos encontrado los coeficientes diferenciales de una funcion qualquiera de x; ahora, como en una curva tal como la AMF (fig. 181) es funcion de la abscisa no solo la ordenada PM, sino

tambien el arco AM, la superficie AMP, la superficie y el volúmen del cuerpo que originaria AMP al girar al rededor de AP, vamos á encontrar sus coeficientes diferenciales. De las dos primeras ya los tenemos [582 y 591], y así pasaremos á los de las tres últimas.

Para esto, llamaremos s á la superficie AMP, y si concebimos que la abscisa $AP=x$ se convierte en $AP'=x'=x+\Delta x$, entonces $z=PM$ se convertirá en $z'=P'M'=z+\Delta z$, y la superf. $APM=s$ se convertirá en $s'=AP'M'=APM+PMM'P'=s+\Delta s$, y Δs será igual á $AP'M'-APM=PMEM'P'$; pero al paso que Δx disminuye, el trapecio rectilineo $PMM'P'$ se va acercando á Δs, de manera que podremos hacer que la diferencia entre dicho trapecio y el espacio mixtilineo igual con Δs llegue á ser menor que qualquiera cantidad dada (*); y como el trapecio $PMM'P'=PP'\left(\frac{PM+P'M'}{2}\right)=\Delta x\left(\frac{z+z'}{2}\right)=\ldots$

$\Delta x\left(\frac{2z+\Delta z}{2}\right)=\Delta x\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)$, resulta que $\Delta x\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)$

se puede acercar á Δs tanto como se quiera, ó dividiendo por Δx, tendremos que $z+\frac{\Delta z}{2}$ se podrá acercar tanto como se quiera á $\frac{\Delta s}{\Delta x}$; luego los límites de estas dos expresiones serán iguales; pero el límite de

---

(*) *Esto es bastante claro; pero si lo quisiéramos referir á nuestra proposicion* [I. 520] *podríamos demostrar en general, que* el espacio comprendido por un arco y una cuerda, si se hace la cuerda dos veces menor y se tira por el punto de division una paralela á las ordenadas, y donde esta encuentra á la curva se tira la cuerda, el espacio comprendido entre esta cuerda y el arco correspondiente será menor que la mitad del espacio anterior; y continuando del mismo modo llegará á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea. *En efecto, si se divide la* PP' (*fig.* 210) *en dos partes iguales, y levantamos la perpendicular* pm, *esta dividirá tambien á la cuerda* MM' *en dos partes iguales; y como si circunscribimos el paralelogramo* MNN'M' *tenemos que el triángulo* MmM' *es igual á la mitad de dicho paralelogramo, será mayor que la mitad del segmento* MemfM', *y por consiguiente los dos segmentos* Mem, mfM' *juntos, serán menores que la mitad del segmento* MemfM', *y con mas razon lo será uno de ellos; luego con dividir la* PP' *en dos partes iguales hemos hecho que la diferencia* Mem *entre el trapecio mixtilineo y el rectilineo sea mas de dos veces menor que lo era antes, y continuando la misma operacion obtendremos un resultado como indica la proposicion.*

$z+\frac{\Delta z}{2}$ es z, y el de $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ es $\frac{ds}{dx}$, luego resultará $z=\frac{ds}{dx}$ ó $ds=zdx$; cuyo resultado enseña que *el coeficiente diferencial de la superficie* APM *considerada como funcion de la abscisa* AP *es igual con la ordenada.*

625 Si las coordenadas no fuesen perpendiculares, como en la (fig. 211), entonces la superficie del trapecio PMM'P' seria igual con $\frac{PM+P'M'}{2}\times P'N=\frac{2z+\Delta z}{2}\times PP'\times \text{sen. } NPP'$; que llamando φ al ángulo NPP' que forman las coordenadas, se tendrá que el trapecio será igual á $\frac{2z+\Delta z}{2}\times \text{sen. } \varphi\times\Delta x$, y pasando á los límites como antes, tendremos que $ds=z.\text{ sen.}\varphi.dx$.

626 Pasemos ya á deducir la fórmula para *la diferencial de la superficie referida á coordenadas polares*; para esto, observaremos que la diferencia de la superficie ADM (fig. 212) está representada por el sector AMM', luego si llamamos s á la superficie ADM, será $AMM'=\Delta s$, y la relacion que tenga con $NN'=\Delta NB=\Delta x$ porque el arco BN hace oficios de abscisa, será $\frac{\Delta s}{\Delta x}$; y siendo el sector $ARM'=\frac{AM'\times M'R}{2}$ se tendrá $\frac{ARM'}{NN'}=\frac{AM'\times M'R}{2NN'}=\frac{RM'}{NN'}\times\frac{AM'}{2}$. Ahora, por ser semejantes los sectores ANN',AM'R, dan $NN':RM'::AN=1:AM'$, y se tendrá $\frac{RM'}{NN'}=\frac{AM'}{1}$, de donde resulta que $\frac{\text{sector } ARM'}{NN'}=\frac{AM'}{2}\times\frac{AM'}{1}=\frac{AM'^2}{2}$; de donde pasando á los límites, será lím. de $\frac{\text{sector } ARM'}{NN'}=$ lím. de $\frac{AM'^2}{2}=\frac{AM^2}{2}=\frac{z^2}{2}$; y como al paso que $NN'=\Delta x$ disminuye acercándose á su límite cero, se acerca AM'R á AM'M, resulta que las relaciones $\frac{\text{sector } ARM'}{NN'}$, $\frac{\text{sect. } AMM'}{NN'}$ se podrán diferenciar entre sí tan poco como se quiera, y por lo mismo tendrán un mismo límite; pero el límite de $\frac{\text{sector } AM'R}{NN'}=\frac{\Delta s}{\Delta x}$ es $\frac{ds}{dx}$, luego este será el límite de $\frac{\text{sector } ARM'}{NN'}$, por lo qual se tendrá $\frac{ds}{dx}=\frac{z^2}{2}$ que da $ds=\frac{z^2dx}{2}$.

627 Si suponemos que la curva AMF (fig. 213) dé una vuelta al rededor del exe AC de las abscisas, y expresamos por S la superficie que describe el arco AM, la descrita por el arco MEM′ será la diferencia de S, y la cuerda MM′ describirá un cono truncado, cuya superficie, llamando π á la razon del diámetro á la circunferencia, es

$$2\pi\left(\frac{\mathrm{MP}+\mathrm{M'P'}}{2}\right)\mathrm{MM'}=2\pi\left(\frac{2z+\Delta z}{2}\right)\sqrt{\overline{\mathrm{MQ}}^2+\overline{\mathrm{M'Q}}^2}=\ldots$$

$2\pi\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)\times\sqrt{\Delta x^2+\Delta z^2}$; y pasando á la relacion será

$$\frac{\text{sup}^{\text{e}}\text{. de trozo orig. por MM}'}{\Delta x}=2\pi\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)\sqrt{1+\frac{\Delta z^2}{\Delta x^2}}.$$

Esto supuesto, si consideramos la superficie S como funcion de la abscisa x, echaremos de ver que quanto mas se acerquen Δx y Δz á su límite, tanto mas se acercará la superficie descrita por la cuerda MM′ á la superficie ΔS descrita por el arco MEM′,

ó la expresion $2\pi\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)\sqrt{1+\frac{\Delta z^2}{\Delta x^2}}$ á la expresion $\frac{\Delta S}{\Delta x}$, y que la diferencia de estas dos expresiones podrá llegar á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea, de donde concluiremos que *el límite* $2\pi z\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}$ *de la primera será igual al límite* $\frac{dS}{dx}$ *de la segunda*; por lo qual será $\frac{dS}{dx}=2\pi z\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}$,

y $dS=2\pi z dx\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}=2\pi z\sqrt{dx^2+dz^2}$.

628 Si llamamos V la funcion de x que expresa el volúmen del cuerpo engendrado por el espacio APM en su revolucion al rededor del exe AC, el volúmen del cuerpo engendrado por el espacio PMEM′P′ terminado por el arco MEM′ será $=\Delta V$, y la del cono truncado engendrado por el trapecio PMM′P′ igual

$$\pi(\mathrm{PM}^2+\mathrm{PM}\times\mathrm{P'M'}+\mathrm{P'M'}^2)\frac{\mathrm{PP'}}{3}=\pi(z^2+zz'+z'^2)\frac{\Delta x}{3}=\ldots$$

$$\pi[z^2+z(z+\Delta z)+(z+\Delta z)^2]\frac{\Delta x}{3}=\pi(3z^2+3z\Delta z+\Delta z^2)\frac{\Delta x}{3}=\ldots$$

$\pi\left(z^2+z\Delta z+\frac{\Delta z^2}{3}\right)\Delta x$, y pasando á la relacion

se tendrá $\frac{\text{vol.orig. por trapecio PMM}'\text{P}'}{\Delta x}=\pi\left(z^2+z\Delta z+\frac{\Delta z^2}{3}\right)$;

pero esta relacion se aproxîmará tanto mas á $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ quanto mas se acerquen Δx y Δz á su límite cero, de modo que su diferencia puede llegar á ser menor que qualquier cantidad dada por pequeña que sea; luego sus límites serán iguales; y por consiguiente $\frac{dV}{dx}=\pi z^2$, *igual á la superficie del círculo que describe la ordenada* PM *en su movimiento de revolucion*, de donde resulta $dV=\pi z^2 dx$.

CÁLCULO INTEGRAL.

De la integracion de las funciones racionales de una sola variable.

629 El cálculo integral tiene por objeto segun hemos dicho [509] *manifestar qual es la funcion primitiva, dado el límite de la relacion entre el incremento de la funcion y de la variable.* De donde se deduce que siendo el inverso al cálculo diferencial, las reglas para integrar han de ser las opuestas á las que se dieron para diferenciar.

La exposicion de los principios de este cálculo presenta divisiones análogas á las que nos ofreció el cálculo diferencial; y así como tratando de este, aplicámos primero las reglas de diferenciar á las funciones explícitas, tambien principiaremos estas investigaciones por el caso en que el coeficiente diferencial de la funcion que se busca, se da inmediatamente en valores de las variables independientes. Quando el coeficiente diferencial de primer órden de una funcion de x viene expresado en valores de x se tiene $\frac{dz}{dx}=X$, siendo $X=f.x$, ó $dz=X\,dx$; luego la funcion buscada es aquella cuya diferencial es Xdx, y se indica poniéndole una S antes, con la qual quisieron dar á conocer los primeros inventores del cálculo, que la funcion equivalia á la suma de las diferenciales. Juan Bernoulli las indicaba con una I inicial de *integral*: de manera que z será igual á S Xdx; y se ve que la característica S es la opuesta de la característica d. Para hallar esta funcion es menester invertir las reglas de la diferenciacion; más á fin de proceder con método, trataremos sucesivamente de las diferentes formas que puede tener la funcion dada X, y que clasificaremos en funciones racionales, en funciones irracionales y en funciones trascendentes de este modo:

$$\text{Funciones racionales}\begin{cases}Ax^m+Bx^n+Cx^p+\&\text{c.}=U\\[2ex]\dfrac{Ax^m+Bx^n+Cx^p+\&\text{c}}{A'x^{m'}+B'x^{n'}+C'x^{p'}+\&\text{c.}}=\dfrac{U}{V}\end{cases}$$

Funciones irracionales $U \times V^{\frac{m}{n}}$.

Funciones trascendentes F.(U, lV),F.$(U,\text{sen.}U)$ &c.

Supongamos que el coeficiente diferencial $\frac{dz}{dx}$ esté representado por el monomio Ax^m, y tendremos $\frac{dz}{dx}=Ax^m$, de donde $dz=Ax^m dx$; pero quando tratámos de diferenciar un monomio en que la variable estaba elevada á potencias, diximos *que se multiplicaba el exponente de la potencia por el mismo monomio disminuyendo el exponente en una unidad, y multiplicándolo todo por la diferencial de la variable*; luego aqui deberemos establecer las reglas en un órden inverso, diciendo: *suprímase la diferencial, auméntese una unidad al exponente, y pártase esto por el exponente que afectaba á la variable despues de aumentado en una unidad*; en virtud de cuya regla tendremos que siendo
$\frac{dz}{dx}=Ax^m$ ó $dz=Ax^m dx$ será $z=\text{S}.Ax^m dx=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}$.

Y tomando casos particulares se tendrá que si $dz=4ax^3 dx$ se deduce
$z=\frac{4ax^4}{4}=ax^4$; si $dz=5bx^9 dx$....$z=\frac{5bx^{10}}{10}=\frac{bx^{10}}{2}$,
si $dz=4ax^{23}\,dx$....$z=\frac{4ax^{24}}{24}=\frac{ax^{24}}{6}$.

630 Tambien podríamos deducir de cada regla del cálculo diferencial otra contraria en el integral; pero ahora solo notaremos que pues la diferencial de una funcion era la misma que la de la funcion acompañada de una constante por via de suma ó de resta, no sabemos si la integral de $Ax^m dx$, es $\frac{Ax^{m+1}}{m+1}$ ó es $\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+B$ siendo B una constante qualquiera; y por lo mismo debemos dexar nuestra misma duda expresada, añadiendo á la integral que da el cálculo una constante indeterminada que señalaremos con las iniciales *const.*

y diremos que S. $Ax^m dx=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+\textit{const.}$

Esta constante se lla[illegible] *arbitraria*, porque quando no hay ninguna circunstancia [illegible]mine, la podemos nosotros elegir á arbitrio, ó hacer que la i[illegible] satisfaga á una condicion. Á la integral que da el cálculo junto con [illegible] constante se le da el nombre de *integral completa*.

631 Quando se nos propone integrar una expresion debemos dexar in-

determinada la constante, y si se nos pide que la determinemos, á lo que se le suele llamar *completar la integral*, entonces debemos pedir la condicion. Así, supongamos que se nos pida completar la integral $\frac{Ax^{m+1}}{m+1}$ de manera que la integral completa sea igual con b quando $x=a$; entonces substituiremos a en vez de x en la expresion $\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+const.$, igualaremos esto con b y de esta equacion despejaremos *const.* de modo que será

$$\frac{Aa^{m+1}}{m+1}+const.=b,$$ lo que da $const.=b-\frac{Aa^{m+1}}{m+1}$;

por lo que en este caso se tendrá $S.\,Ax^{m+1}dx=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+b-\frac{Aa^{m+1}}{m+1}$.

632 Ahora, quando el cálculó integral se aplica á alguna qüestion, entonces la misma qüestion debe suministrar la constante, de manera que el resultado no convenga sino á dicha qüestion. Para esto lo que se necesita es conocer un valor absoluto de la integral, pues restando de él la integral que da el cálculo, tendremos el valor de la constante; el valor absoluto que se puede conocer en qualquier qüestion es *el saber qué valor tiene la variable quando la integral que expresa lo que indagamos se reduce á cero*, y por lo mismo vamos á manifestar que forma tiene entonces la constante.

Supongamos que P sea la integral que da el cálculo, y tendremos que $P+const.$ será la integral completa; supongamos ahora que substituyendo en P en vez de la variable el valor que ha de reducir á cero la integral completa, se convierte en Q y se tendrá $Q+const.=0$, lo que da $const.=0-Q=-Q$ de donde se deduce que en este caso se completa la integral *añadiendo á la integral que da el cálculo, el valor que resulta de substituir en la integral que da el cálculo, en vez de la incógnita el valor que reduce la integral completa á cero, y tomando todo esto con un signo contrario.*

Y así, si nos propusiéramos integrar la expresion [630] de manera que la integral completa se reduxese á cero quando $x=a$, tendríamos

$$\frac{Aa^{m+1}}{m+1}+const.=0$$ de donde $const.=-\frac{Aa^{m+1}}{m+1}$,

lo que da $z=S.Ax^{m}dx=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}-\frac{Aa^{m+1}}{m+1}=\frac{A(x^{m+1}-a^{m+1})}{m+1}$ (α).

Si la quisiéramos completar de manera que se reduxese á cero quando $x=0$, tendríamos $\frac{A0^{m+1}}{m+1}+const.=0$ de donde $const.=0$; lo que nos

dice que quando la integral completa es cero al mismo tiempo que la variable, no hay término constante en la funcion.

633 De aqui en adelante dexaremos indeterminada la constante á no ser que alguna investigacion particular nos conduzca á lo contrario.

Antes de pasar mas adelante conviene exâminar un caso particular en que el valor de la expresion (α) se convierte en $\frac{0}{0}$, que es aquel en que $m=-1$, porque entonces se tiene $z=\frac{A(x^0-a^0)}{0}=\frac{A(1-1)}{0}=\frac{0}{0}$.

Para encontrar su verdadero valor es necesario recurrir á la regla (573), y como hemos hecho ver [575] que $\frac{a^x-b^x}{x}$ se reducia á $l.a-l.b$ en la suposicion de $x=0$, tendremos que en el exemplo actual mudando las letras convenientemente será $z=A(l.x-l.a)$;

pero quando $m=-1$ se tiene $dz=Ax^{-1}dx$;

luego $dz=\frac{Adx}{x}$, da $z=A\ (l.x-l.a)$, ó $z=Alx+const.$

Lo mismo se hubiera concluido del párrafo [545] pues que por él se tiene $dlx=\frac{dx}{x}$, y manifiesta que *siempre que el numerador de una fraccion sea la diferencial del denominador esta fraccion tiene por integral al logaritmo del denominador.*

La excepcion que presenta aqui la regla del párrafo (629) proviene de la imposibilidad de expresar la trascendente $l.x$ por un número finito de términos algebráicos.

634 Toda la dificultad de la integracion de las funciones de una sola variable consiste en la investigacion de las trasformaciones propias para reducir las funciones propuestas á uno ó muchos monomios á que se pueda aplicar la regla antecedente.

Luego si se tubiese $dz=ax^m dx+bx^n dx+cx^p dx$ hallaríamos inmediatamente (§ 629) $z=\frac{ax^{m+1}}{m+1}+\frac{bx^{n+1}}{n+1}+\frac{cx^{p+1}}{p+1}+.....const.$

y no añadimos mas que una constante arbitraria, porque aunque añadiésemos una para cada monomio, juntas no equivaldrian mas que á una sola que seria igual á su suma. En general, pues que hemos visto [517] que $d(u+v-w)=du+dv-dw$,

se debe concluir que $S.(du+dv-dw)=S.du+S.dv-S.dw$;

y que $S.(Pdx+Qdx-Rdx)=S.Pdx+S.Qdx-S.Rdx$.

635 Hagamos notar desde ahora una conseqüencia que nos será muy útil en adelante, y es que integrando separadamente cada término de

$d.ut=udt+tdu$ [§ 518] da $ut=S.tdu+S.udt$; lo que establece una relacion entre las funciones primitivas de las diferenciales udt, tdu de modo que siendo conocida la una, la otra lo es tambien, porque se tiene v. g. $S.udt=ut-S.tdu$; la diferencial $d\frac{u}{t}=\frac{du}{t}-u\frac{dt}{t^2}$ [§ 520]

dará igualmente $\frac{u}{t}=S.\frac{du}{t}-S.u\frac{dt}{t^2}$,

de donde se sacará $S.u\frac{dt}{t^2}=-\frac{u}{t}+S.\frac{du}{t}$.

Y conviene advertir que este resultado no es sino una conseqüencia del precedente; porque substituyendo en el valor de $S.udt$ hallado antes, $\frac{dt}{t^2}$ en vez de dt lo que se reduce á mudar t en $-\frac{1}{t}$, pues que $\frac{dt}{t^2}=t^{-2}dt=-d.t^{-1}=-d.\frac{1}{t}$, se tendrá $S.u\frac{dt}{t^2}=-\frac{u}{t}+S.\frac{du}{t}$.

De que $d.au=adu$ [§ 515], se sigue $S.aXdx=aS.Xdx$, es decir, *que se puede hacer salir del signo S la constante a.*

636 Si nos propusiésemos $dz=(ax+b)^m dx$, efectuaríamos la potencia indicada, é integraríamos cada monomio que resultase de esta operacion; pero conviene observar que se puede llegar al resultado sin efectuar el desarrollo; para lo qual basta hacer $ax+b=u$,

lo que da $x=\frac{u-b}{a}$, y $dx=\frac{du}{a}$; y substituyéndole en la expresion de dz

se convertirá en $dz=\frac{u^m du}{a}$ y por consiguiente $z=\frac{u^{m+1}}{a(m+1)}+const.$

y poniendo ahora en vez de u su valor, se tendrá $z=\frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)}+const.$

Si se tubiese $dz=(ax^n+b)^m x^{n-1}dx$, la transformacion tendria aun lugar, porque suponiendo $ax^n+b=u$

resultaria diferenciando $nax^{n-1}dx=du$,

de donde $x^{n-1}dx=\frac{du}{na}$, $dz=\frac{u^m du}{na}$, y $z=\frac{u^{m+1}}{na(m+1)}+const$

lo que da por último $z=\frac{(ax^n+b)^{m+1}}{na(m+1)}+const.$

637 Pasemos á las funciones fraccionarias, y con el objeto de prin-

cipiar por el caso mas simple, supongamos que se tenga $dz=\frac{Ax^m dx}{(ax+b)^n}$;

haciendo $ax+b=u$ se halla $x=\frac{u-b}{a}$, $dx=\frac{du}{a}$,

y por consiguiente $dz=\frac{A\left(\frac{u-b}{a}\right)^m \frac{du}{a}}{u^n}=\frac{A(u-b)^m du}{a^{m+1}u^n}$,

desenvolviendo la potencia $(u-b)^m$, multiplicando el resultado por du, y dividiendo despues por u^n se tendrá una serie de monomios que podremos integrar por la regla dada [629].

Tomemos por exemplo el caso en que $m=3$ y $n=2$,

y resultará $dz=\frac{A(u-b)^3 du}{a^4u^2}=\frac{A}{a^4}(udu-3bdu+3b^2u^{-1}du-b^3u^{-2}du)$;

aplicando á cada uno de estos monomios la regla general.

resultará $z=\frac{A}{a^4}\left(\frac{u^2}{2}-3bu+3b^2l.u+b^3u^{-1}\right)+$ const.

se volverá á poner en vez de u su valor, y se tendrá por último

$$z=\frac{A}{a^4}\left[\tfrac{1}{2}(ax+b)^2-3b(ax+b)+3b^2l.(ax+b)+b^3(ax+b)^{-1}\right]+\text{const.}$$

Si se tubiese $dz=\frac{Ax^n dx+Bx^p dx+Cx^q dx+\&c.}{(a+bx)^m}$.

la escribiríamos así $dz=\frac{Ax^n dx}{(a+bx)^m}+\frac{Bx^p dx}{(a+bx)^m}+\frac{Cx^q dx}{(a+bx)^m}+\ldots$

y se haria con cada término en particular lo que acabamos de hacer con el primero.

638 Las diferenciales fraccionarias que son racionales son generalmente de la forma $\frac{(Ax^m+Bx^n+Cx^p\ldots\ldots)dx}{A'x^{m'}+B'x^{n'}+C'x^{p'}\ldots\ldots}$,

que para abreviar representaremos por $\frac{Udx}{V}$.

Es necesario observar desde luego que *el exponente de* x *en el numerador se puede suponer menor que en el denominador*; porque si esto no se verificase lo conseguiríamos dividiendo U por V y llamando Q al quociente de esta division, y R á la resta resultaria

$S.\frac{Udx}{V}=S.Qdx+S.\frac{Rdx}{V}$, Pero Q siendo una funcion racional y entera,

S.Qdx se obtendria por la aplicacion inmediata de la regla general, y no se necesitaria hallar sino la de S.$\frac{Rdx}{V}$; fórmula en que la funcion R con relacion á x ha de ser en un grado inferior lo menos á la funcion V; luego la forma mas general que puede tener la fraccion $\frac{Udx}{V}$,

será $\frac{(Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}\ldots+T)dx}{x^n+A'x^{n-1}+B'x^{n-2}+C'x^{n-3}\ldots+T'}$.

Ahora, el método general *para integrar las diferenciales expresadas por fracciones racionales, consiste en descomponerlas en otras, cuyos denominadores sean mas simples, que se designan baxo el nombre de fracciones parciales*; y habiendo manifestado ya [437 y siguientes] como se executa esto, no nos costará dificultad. En efecto, suponiendo que las fracciones parciales que resultan de la $\frac{Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}\ldots..T}{x^n+A'x^{n-1}+B'x^{n-2}+C'x^{n-3}..T'}$,

sean $\frac{M}{x+a}$, $\frac{N}{x+b}$, $\frac{P}{x+c}$ &c. se tendrá

$$\text{S.}\left(\frac{Mdx}{x+a}+\frac{Ndx}{x+b}+\frac{Pdx}{x+c}+\text{ \&c.}\right)=\text{S.}\frac{Mdx}{x+a}+\text{S.}\frac{Ndx}{x+b}+\text{S.}\frac{Pdx}{x+c}+\text{\&c.};$$

para integrar cada una de estas fracciones, como en el numerador M, N &c. no hay x, haciendo $x+a=u$ tendremos $dx=du$,

y será $\text{S.}\frac{Mdx}{x+a}=\text{S.}\frac{Mdu}{u}=Ml.u=l.u^M=l.(x+a)^M+const.$,

haciendo en la segunda $x+b=u'$ será $dx=du'$, y tendremos

$$\text{S.}\frac{Ndx}{x+b}=\text{S.}\frac{Ndu'}{u'}=Nl.u'=l.u'^N=l.(x+b)^N+const.'$$

y como del mismo modo hallaríamos que $\text{S.}\frac{Pdx}{x+c}=l.(x+c)^P+const.''$

y así de los demas términos que hubiese, resultará que

$$\text{S.}\frac{(Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}\ldots\ldots..T)dx}{x^n+A'x^{n-1}+B'x^{n-2}+C'x^{n-3}..T'}=\ldots$$

$$l.(x+a)^M+const.+l.(x+b)^N+const.'+l.(x+c)^P+const.''+\text{\&c.},$$

ó indicando por *const.* la suma de todas las *constantes* particulares, y considerando que suma de logaritmos es lo mismo que el logaritmo del producto, tendremos que esta expresion se convertirá por último en

$$l.[(x+a)^M(x+b)^N(x+c)^P\ldots]+const.$$

639 Como si entre los factores del denominador se hallase uno por exemplo $(x+k).p$ veces, tendríamos [§ 438] que la fraccion correspondiente á todos estos factores iguales, seria $\frac{Mdx}{(x+k)^p}$, la qual se descompone en $\frac{Ndx}{(x+k)^p}+\frac{Pdx}{(x+k)^{p-1}}+\frac{Qdx}{(x+k)^{p-2}}+\ldots\ldots\frac{Tdx}{x+k}$. Conviene manifestar como se integra uno qualquiera de estos términos tal como el primero, y tendremos haciendo $x+k=u, x=u-k$ y $dx=du$, por lo que $S.\frac{Ndx}{(x+k)^p}=S.\frac{Ndu}{u^p}=S.Nu^{-p}du=\ldots.$

$$\frac{Nu^{-p+1}}{-p+1}=\frac{Nu^{-p+1}}{1-p}=\frac{N}{(1-p)u^{p-1}}=\frac{N}{(1-p)(x+k)^{p-1}}+const.$$

Del mismo modo hallaríamos las integrales de los demas términos, y tendríamos que todas eran racionales excepto la del último que seria $Tl.(x+a)=l.(x+a)^T$.

Aplicando estas observaciones á la funcion $\frac{(1+x^2)dx}{x-x^3}$, que es igual [§437] á

$$\frac{1+x^2}{x-x^3}dx=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)dx=\frac{dx}{x}+\frac{dx}{1-x}-\frac{dx}{1+x},$$

y observando que $\frac{dx}{1-x}=-\frac{-dx}{1-x}$ tendremos que su integral será

$$S.\frac{dx}{1-x}=S.-\frac{-dx}{1-x}=S.-1\times\frac{-dx}{1-x}=\ldots.$$

$$-1S.\frac{-dx}{1-x}=-1.l.(1-x)=-l.(1-x),$$

por lo que resultará $S.\frac{(1+x^2)dx}{x-x^3}=S.\left(\frac{dx}{x}+\frac{dx}{1-x}-\frac{dx}{1+x}\right)=\ldots.$

$$l.x-l.(1-x)-l.(1+x)=l.\frac{x}{(1-x)(1+x)}\text{ y }=l.\frac{x}{1-x^2}+const..$$

Si la fraccion fuese $\frac{dx}{x^3(1-x)^2(1+x)}$ la descompondríamos en las fracciones [§ 439] $\frac{dx}{x^3}+\frac{dx}{x^2}+\frac{2dx}{x}+\frac{dx}{2(1-x)^2}+\frac{7dx}{4(1-x)}-\frac{dx}{4(1+x)}$,

y tendríamos

$$\text{S.}\frac{dx}{x^3(1-x)^2(1+x)}=-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}+2l.x+\frac{1}{2(1-x)}-\tfrac{7}{4}l.(1-x)\quad\ldots\ldots$$

$$\tfrac{1}{4}l.(1+x)=\frac{-1-2x}{2x^2}+\frac{1}{2(1-x)}+l.x^2-l.(1-x)^{\frac{7}{4}}-l.(1+x)^{\frac{1}{4}}=\ldots\ldots$$

$$\frac{-1-2x+x+2x^2+x^2}{2x^2(1-x)}+l.\frac{x^2}{(1-x)^{\frac{7}{4}}(1+x)^{\frac{1}{4}}}=\frac{-1-x+3x^2}{2x^2-2x^3}+l.\frac{x^2}{(1-x)^{\frac{7}{4}}(1+x)^{\frac{1}{4}}}.$$

Donde se ve que como hemos manifestado el modo de descomponer una fraccion racional en otras mas simples, y hecha esta descomposicion se puede integrar, siempre es integrable qualquiera fraccion de la forma $\frac{Udx}{V}$.

El cálculo diferencial nos serviria para hacer la descomposicion en fracciones simples; pero no nos detendremos en esto, y solo observaremos que pues $\frac{1}{x^8+x^7-x^4-x^3}$ [§440]$=\frac{1}{8(x-1)}+\frac{1}{4(x+1)^2}+\ldots\ldots$

$$\frac{9}{8(x+1)}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{x+1}{4(x^2+1)},$$

se tendrá

$$\text{S.}\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}=\text{S.}\left(\tfrac{1}{8}\times\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{4}\times\frac{dx}{(x+1)^2}+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.\frac{9}{8}\times\frac{dx}{x+1}-\frac{dx}{x^3}+\frac{dx}{x^2}-\frac{dx}{x}-\tfrac{1}{4}\times\frac{xdx}{x^2+1}-\tfrac{1}{4}\times\frac{dx}{x^2+1}\right)=\ldots\ldots$$

$$\tfrac{1}{8}l.(x-1)-\tfrac{1}{4}\times\frac{1}{x+1}+\tfrac{9}{8}l.(x+1)+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}-l.x-\tfrac{1}{8}l.(x^2+1)-\ldots\ldots$$

[§ 550] $\frac{1}{4}$ arc. (cuya tangente$=x$, y el radio igual con la unidad)$+$*const.*

De la integracion de las funciones irracionales.

640 Las funciones irracionales se deben considerar como integradas, siempre que por alguna trasformacion se hayan hecho racionales; ó al menos quando se han reducido á series de monomios irracionales, porque entonces se les pueden aplicar inmediatamente las reglas precedentes.

Propongámonos, por exemplo, la expresion $dz=\frac{(1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2})dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; aqui advertiremos que si en vez de x se substituyese una cantidad que

tubiese raiz quadrada y cúbica exâcta, entonces resultaria que se convertiria en una funcion racional: luego si hacemos $x=u^6$ resultará

$dx=6u^5du, \sqrt{x}=\sqrt{u^6}=u^3, \sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{u^{12}}=u^4,$

lo que da $dz=\frac{(1+u^3-u^4)6u^5du}{1+u^2}=-6du\times\frac{u^9-u^8-u^5}{1+u^2}$,

que haciendo la division hasta donde se pueda, se tendrá

$$dz=-6\left(u^7du-u^6du-u^5du+u^4du-u^2du+du-\frac{du}{1+u^2}\right),$$

cuya integral teniendo presente [§ 550] que $\frac{du}{1+u^2}=$ arco cuya tang.$=u$,

es $z=-6\left(\frac{u^8}{8}-\frac{u^7}{7}-\frac{u^6}{6}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}+u-\text{arc.}(\text{tang.}=u)\right)+const.$

y substituyendo ahora en vez de u su valor $\sqrt[6]{x}$ se tendrá

$$z=-\tfrac{6}{8}x\sqrt[6]{x^2}+\tfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+x-\tfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\text{arc.}(\text{tang.}=\sqrt[6]{x})+const.$$

641 Sea ahora una funcion que contenga el radical $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, y como no puede menos de tener una de estas dos formas

$$Xdx\sqrt{A+Bx+Cx^2}, \text{ ó } \frac{Xdx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}},$$

siendo X una funcion racional de x, haremos notar ante todas cosas que la una de estas formas la podemos convertir en la otra, porque se puede escribir la primera del modo siguiente

$$Xdx\,\frac{\sqrt{A+Bx+Cx^2}\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}=\frac{X(A+Bx+Cx^2)dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}},$$

cuyo numerador es una funcion racional de x.

Antes de indicar los medios de hacer racional con relacion á x la expresion $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$ pondremos la cantidad que hay debaxo del radical baxo la forma $C\left(\frac{A}{C}+\frac{B}{C}x+x^2\right)$,

y haciendo para abreviar $C=\gamma^2$, $\frac{A}{C}=\alpha$, $\frac{B}{C}=\text{б}$,

resultará $\sqrt{A+Bx+Cx^2}=\gamma\sqrt{\alpha+\text{б}x+x^2}$.

Esto supuesto, haremos $\sqrt{\alpha+\text{б}x+x^2}=x+u$,

y elevando al quadrado resultará $\alpha+\text{б}x+x^2=x^2+2xu+u^2$,

lo queda $x=\frac{\alpha-u^2}{2u-\beta}$, de donde $dx=\frac{(2u-\beta)\times-2udu-(\alpha-u^2)\times 2du}{(2u-\beta)^2}=\ldots$

$$\frac{-4u^2du+2\beta udu-2\alpha du+2u^2du}{(2u-\beta)^2}=\frac{-2(u^2-\beta u+\alpha)du}{(2u-\beta)^2}=\frac{-2(\alpha-\beta u+u^2)du}{(2u-\beta)^2};$$

$$\text{y } \sqrt{A+Bx+Cx^2}=\gamma(u+x)=\gamma\left(u+\frac{\alpha-u^2}{2u-\beta}\right)=\gamma\left(\frac{\alpha-\beta u+u^2}{2u-\beta}\right);$$

por medio de cuyos valores se mudará la diferencial $\frac{Xdx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$, en otra de la forma Udu siendo U una funcion racional de u, y real siempre que C sea positiva; pero si C fuese negativa entonces γ seria imaginaria, y la trasformada llegaria á serlo tambien.

En este caso se tendria $\sqrt{A+Bx-Cx^2}$, y haciendo $C=\gamma^2$, $\frac{A}{C}=\alpha$, $\frac{B}{C}=\beta$, resultaria $\gamma\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}$. La cantidad $x^2-\beta x-\alpha$ se puede siempre descomponer en factores reales del primer grado; si los representamos por $x-a$, $x-a'$, tendremos

$$\alpha-\beta x-x^2=-(x^2-\beta x-\alpha)=-(x-a)(x-a')=(x-a)(a'-x).$$

Supongamos ahora que $\sqrt{(x-a)(a'-x)}=(x-a)u$,
y elevando al quadrado será $(x-a)(a'-x)=(x-a)^2u^2$,
de donde dividiendo por $x-a$ da $a'-x=(x-a)u^2$, que da por último

$$x=\frac{a'+au^2}{u^2+1},\ (x-a)u=\left(\frac{a'+au^2}{u^2+1}-a\right)u=\frac{a'-a}{u^2+1}u,$$

$$\text{y } dx=\frac{(u^2+1)2audu-(a'+au^2)2udu}{(u^2+1)^2}=\frac{(a-a')2udu}{(u^2+1)^2},$$

cuyos valores tambien harán racional la diferencial propuesta.

Tomemos por exemplo la diferencial $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$; la primera de las trasformaciones precedentes dará

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}=-\frac{2du}{\gamma(2u-\beta)}=-\frac{1}{\gamma}\times\frac{2du}{2u-\beta},$$

cuya integral es $-\frac{1}{\gamma}l.(2u-\beta)+const.$

Volviendo á poner en vez de u su valor $-x+\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}$, y por α,β,γ, las cantidades que representan, resultará

$$-\frac{1}{\sqrt{C}}l.\left(\frac{1}{\sqrt{C}}\left(-\frac{B}{\sqrt{C}}-2x\sqrt{C}+2\sqrt{A+Bx+Cx^2}\right)\right)+const.$$

De la integracion de las diferenciales binomias.

642 Baxo el nombre de diferenciales binomias se comprenden todas las que son susceptibles de esta forma, $dz=kx^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ en la qual podemos suponer que m y n son números enteros sin disminuir su generalidad, porque sino lo fuesen, y tubiésemos por exemplo

$dz=x^{\frac{r}{s}}dx\left(a+bx^{\frac{r'}{s'}}\right)^{\frac{p}{q}}$, haciendo $x=u^{ss'}$ se tendria

$dx=ss'u^{ss'-1}du, x^{\frac{r}{s}}=(u^{ss'})^{\frac{r}{s}}=u^{s'r}$, y $x^{\frac{r'}{s'}}=u^{sr'}$,

cuyos valores substituidos en dz darian $dz=ss'u^{rs'+ss'-1}du(a+bu^{r's})^{\frac{p}{q}}$, que haciendo ahora $rs'+ss'=m$, y $r's=n$, y $ss'=k$,

será $dz=ku^{m-1}du(a+bu^n)^{\frac{p}{q}}$.

Tambien se puede considerar á n esencialmente como número positivo, porque en el caso de que se tubiese $dz=kx^{m-1}dx(a+bx^{-n})$,

haciendo $x=\frac{1}{u}$ resultaria $dx=\frac{-du}{u^2}$, y $dz=-ku^{-m-1}du(a+bu^n)^{\frac{p}{q}}$.

Ahora, todo está en averiguar en qué casos se podrá hacer racional la diferencial $dz=kx^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$; para lo qual haremos $a+bx^n=u^q$ lo que dará

$(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=u^p$, $x^n=\frac{u^q-a}{b}$, $x=\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, $x^m=\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$,

y diferenciando esta expresion se tendrá

$$mx^{m-1}dx=\frac{m}{n}\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}\times\frac{qu^{q-1}du}{b},$$

$$ó\ x^{m-1}dx=\frac{1}{nb}qu^{q-1}du\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1};$$

lo que dará $dz=k\frac{q}{nb}u^{p+q-1}\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}du\ (\mu)$.

Donde se ve que *esta expresion será racional siempre que* $\frac{m}{n}$ *sea un número entero*, y por consiguiente *en este caso se podrá integrar*, pues la podremos desenvolver en una serie de monomios integrables cada uno de por sí.

643 Tambien hay otros casos en que puede serlo; y para determinarlos haremos $a+bx^n=x^nu^q$,

de donde $x^n=\frac{a}{u^q-b}, x=\left(\frac{a}{u^q-b}\right)^{\frac{1}{n}}, \ x^m=\left(\frac{a}{u^q-b}\right)^{\frac{m}{n}}$;

diferenciando y suprimiendo la cantidad comun m, se tendrá

$$x^{m-1}dx=\frac{1}{n}\left(\frac{a}{u^q-b}\right)^{\frac{m}{n}-1}\times\frac{-aqu^{q-1}}{(u^q-b)^2}du=....$$

$$\frac{-qa^{\frac{m}{n}}u^{q-1}du}{n(u^q-b)^{\frac{m}{n}-1+2}}=\frac{-qa^{\frac{m}{n}}u^{q-1}du}{n(u^q-b)^{\frac{m}{n}+1}},$$

y á causa de ser $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=(x^nu^q)^{\frac{p}{q}}=\left(u^q\left(\frac{a}{u^q-b}\right)\right)^{\frac{p}{q}}=\frac{a^{\frac{p}{q}}u^p}{(u^q+b)^{\frac{p}{q}}}$,

tendremos que la diferencial propuesta será

$$dz=k\frac{-qa^{\frac{m}{n}}u^{q-1}du}{n(u^q-b)^{\frac{m}{n}+1}}\times\frac{a^{\frac{p}{q}}u^p}{(u^q-b)^{\frac{p}{q}}}=-k\frac{qa^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}u^{p+q-1}du}{n(u^q-b)^{\frac{p}{q}+\frac{m}{n}+1}};$$

resultado que *será racional siempre que* $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ *sea entero*; pero aunque este resultado sea racional no por eso diremos que siempre se podrá integrar exâctamente como en el caso anterior, porque aqui aun permanece la funcion quebrada.

Así, si tubiésemos para integrar la expresion $dz=8x^9dx(a+bx^5)^{\frac{2}{3}}$ como aqui seria $m=10$ y $n=5$ resultaria $\frac{10}{5}=2$ número entero; luego esta fórmula seria integrable exâctamente; y como aqui $k=8$, $p=2$, $q=3$, y $u=a+bx^5$, será haciendo las substituciones en la fórmula (μ)

$$dz=8\times\frac{3}{5b}u^{5-1}\left(\frac{u^3-a}{b}\right)^{\frac{10}{5}-1}du=\frac{24}{5b}u^4\left(\frac{u^3-a}{b}\right)^1du=....$$

$\frac{24}{5b^2}(u^7-au^4)du=\frac{24}{5b^2}(u^7du-au^4du)$,

lo que da $z=\frac{24}{5b^2}$ S.$(u^7du-au^4du)=\frac{24}{5b^2}\left(\frac{u^8}{8}-\frac{au^5}{5}\right)+$ const. $=$...

$\frac{24}{5b^2}u^5\left(\frac{u^3}{8}-\frac{a}{5}\right)+$const.$=\frac{24}{5b^2}(a+bx^5)^5\left(\frac{(a+bx^5)^3}{8}-\frac{a}{5}\right)+$const.$=$..

$\frac{24}{40b^2}(a+bx^5)^8-\frac{24a}{25b^2}(a+bx^5)^5+$ const.

Quando $m=n$, $\frac{m}{n}=1$ es número entero, y se podrá integrar exâctamente la funcion por la fórmula; pero en este caso podemos conseguir nuestro fin sin su auxîlio, haciendo uso de las trasformaciones, para que lo que hay fuera del paréntesis sea la diferencial de lo que hay dentro multiplicado por una constante; y así, si nos propusiéramos integrar la expresion $dz=4ax^5dx(c+2x^6)^{\frac{4}{5}}$ tendríamos que hacer lo que está fuera del paréntesis igual á $2.6x^5dx=12x^5dx$ multiplicado ó dividido por un factor constante, para lo qual nos bastaria multiplicar y dividir por 3 y separar el factor a en estos términos, lo que dará

$dz=\frac{12ax^5dx}{3}\times(c+2x^6)^{\frac{4}{5}}=\frac{a}{3}\times 12x^5dx(c+2x^6)^{\frac{4}{5}}$,

de donde $z=$S.$\frac{a}{3}\times 12x^5dx(c+2x^6)^{\frac{4}{5}}=\frac{a}{3}$ S.$12x^5dx(c+2x^6)^{\frac{4}{5}}=$

$\frac{a}{3}\times\frac{(c+2x^6)^{\frac{4}{5}+1}}{\frac{4}{5}+1}+$ const.

644 Pues que no es posible integrar en general la fórmula S.$x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, la idea que se presenta al principio es tratar de reducirla á los casos mas simples, haciendo uso de la observacion que hicimos [635] acerca de que S.$udt=ut-$S.tdu; porque si se descompone la cantidad $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ en dos factores de los quales el uno lo representemos por dt y el otro por u, se hará depender la integracion de la fórmula propuesta de la de S.udt, que, en ciertos casos, será mas simple que la propuesta, como vamos á manifestar.

Entre las diversas maneras de que se puede descomponer la diferencial $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ en factores, la que primero se ofrece consiste en hacer $x^{m-1}dx=dt$, lo que da $t=\frac{x^m}{m}$, y resulta que $u=(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$;

$$du=\frac{p}{q}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}\times nbx^{n-1}dx,$$

$$\text{y } S.x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{x^m}{m}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}-\frac{pnb}{qm}S.x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}.$$

Esta fórmula ya nos da algo reducida la propuesta ; pero se llegará aun á alguna otra mas simple, observando que

$$(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}(a+bx^n),$$

$$\text{y } S.x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=aS.x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}+bS.x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}\ (\alpha);$$

y substituyendo este valor en el primer miembro de la equacion precedente, y despejando del resultado el valor de $S.x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}$, se obtendrá

$$S.x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}=\frac{\frac{x^m}{m}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}-aS.x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}}{b+\frac{pnb}{qm}}\ (\beta).$$

Si para mayor sencillez se escribe $\frac{p}{q}$ en vez de $\frac{p}{q}-1$, y $\frac{p}{q}+1$ en vez de $\frac{p}{q}$, y se reduce todo á un quebrado simple, resultará

$$S.x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}-amqS.x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{b(qm+pn+qn)}\ (\gamma);$$

poniendo aun m en vez de $m+n$, y por consiguiente $m-n$ en vez de m, se tendrá

$$S.x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}-aq(m-n)S.x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{b(qm+pn)}\ (\delta),$$

donde vemos que la integracion de $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, la tenemos reducida á la de $x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$; y por el mismo método podremos referir esta á la de $S.x^{m-2n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, escribiendo $m-n$ en vez de m en la equacion (δ);

despues mudando aun m en $m-2n$ en esta misma equacion, hará conocer á $S.x^{m-2n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ por medio de $S.x^{m-3n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ y así sucesivamente; por lo que se tendrá

$$S.x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^{m-2n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{b[(m-n)\times q+np]}-\frac{(m-2n)qaS.x^{m-2n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{b[(m-n)q+np]},$$

$$S.x^{m-2n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^{m-3n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{b[(m-2n)q+pn]}-\frac{(m-3n)qaS.x^{m-3n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{b[(m-2n)q+np]}$$

y en general $S.x^{m-(h-1)n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\ldots$

$$\frac{qx^{m-hn}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{b[(m-(h-1)n)q+np]}-\frac{(m-hn)qaS.x^{m-hn-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{b[(m-(h-1)n)q+np]},$$

expresando con n un número entero qualquiera. Donde se ve que si m es múltiplo de n, se hallará un término respecto del qual $m-hn=0$, en cuyo caso la cantidad $S.x^{m-hn-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ que está multiplicada por este factor, desaparecerá, y por consiguiente se llegará á tener un resultado á que ya no afecte ninguna integral.

645 Si substituimos en la equacion (α) en vez de $S.x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}$, el valor que da la equacion (β), resultará

$$S.x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}+pnaS.x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}}{qm+pn} \quad (\varepsilon).$$

Substituyendo $\frac{p}{q}-1$ en vez de $\frac{p}{q}$ en esta equacion, se obtendrá $S.x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}$ por medio de $S.x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-2}$, y así se continuaria hasta haber quitado todas las unidades que se pudiesen contener en el número fraccionario $\frac{p}{q}$.

Otras muchas observaciones podríamos hacer sobre este punto; pero nos contentaremos con hacer la siguiente aplicacion, porque la necesitaremos en lo sucesivo. Supongamos que se nos dé la expresion $S.dx\sqrt{2ax-x^2}$, en la qual haciendo $x=a-u$, que da $dx=-du$,

la tendremos reducida á $S.-du\sqrt{a^2-u^2}=-S.du(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}$;
y comparando esta expresion con la (ε), se tendrá

$m-1=0$, $n=2$, $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$, $b=-1$, y que será necesario substituir a^2 en vez de a, y u en lugar de x, con lo qual nos resultará

$$-S.du(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}=-\frac{2u(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}+2a^2S.du(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}}{4},$$

ó $-S.du(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2}-\frac{1}{2}a^2S.\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$;

pero [§ 550] $\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ es la diferencial de un arco cuyo seno está representado por $\frac{u}{a}$; luego $S.\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\text{arco}\left(\text{sen.}=\frac{u}{a}\right)$,
y por lo mismo

$$S.dx\sqrt{2ax-x^2}=-S.du(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2}-\frac{1}{2}a^2\ \text{arco}\left(\text{sen.}=\frac{u}{a}\right)+$$
$$const.=-\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}-\frac{1}{2}a^2\ \text{arco}\left(\text{sen.}=\frac{a-x}{a}\right)+const.$$

Si determinamos la constante arbitraria de manera que la integral se desvanezca quando $x=0$, se tendrá para determinarla la equacion

$$-\frac{1}{2}a^2\text{arco}\left(\text{sen.}=\frac{a}{a}=1\right)+const.=0;$$

de donde resulta $const.=\frac{1}{2}a^2$ arco $\frac{1}{2}\pi$;
y substituyendo este valor, tendremos

$$S.dx\sqrt{2ax-x^2}=-\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}-\frac{1}{2}a^2.\text{arco}\left(\text{sen.}=\frac{a-x}{a}\right)+$$
$$\frac{1}{2}a^2.\ \text{arco de}\ \frac{1}{2}\pi=-\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}+\frac{1}{2}a^2(\text{arco de}\ \frac{1}{2}\pi)-$$
$$\text{arco de}\left(\text{sen.}=\frac{a-x}{a}\right)=-\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}+\frac{1}{2}a^2\times\text{arco}\left(\text{cos.}=\frac{a-x}{a}\right).$$

646 Quando por ninguno de estos medios se puede encontrar integral exâcta, se desenvuelve la expresion en serie y se va integrando cada término separadamente; y así, para integrar por este medio la expresion $S.kx^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, harémos $\frac{p}{q}=r$

y desenvolviendo el binomio en serie, tendremos

$$(a+bx^n)^r=a^r+ra^{r-1}bx^n+\frac{r(r-1)}{2}a^{r-2}b^2x^{2n}+\&c.=\ldots$$

$$a^r\left(1+\frac{rb}{a}x^n+\frac{r(r-1)\times b^2x^{2n}}{2a^2}+\&c.\right)$$

luego $z=ka^r\text{S.}(x^{m-1}dx+\frac{rb}{a}x^{n+m-1}dx+\frac{r(r-1)}{2a^2}b^2x^{2n+m-1}+\&c.)=$

$$ka^r\left(\frac{x^m}{m}+\frac{rb}{a}\times\frac{x^{n+m}}{n+m}+\frac{r(r-1)b^2x^{2n+m}}{2a^2(2n+m)}+\&c.\right)+const.$$

Y como no solo estas funciones binomias, sino qualesquiera otras, ya sean racionales ya sean quebradas, se pueden desenvolver en series, resulta que quando $dz=Xdx$ no se puede integrar exâctamente, se desenvolverá X en una serie, se multiplicará por dx, y luego se integrará; por lo qual si suponemos que

$$X=Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+Dx^{m+3n}+\&c.$$

tendremos $dz=Ax^mdx+Bx^{m+n}dx+Cx^{m+2n}dx+\&c.$

$$\text{y } z=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+\frac{Bx^{m+n+1}}{m+n+1}+\frac{Cx^{m+2n+1}}{m+2n+1}+\&c.+const.$$

Si en el desarrollo de la funcion X se hallase algun término de la forma $\frac{P}{x}$, entonces, despues de multiplicado por dx é integrando, daria $P\times l.x.$

Supongamos ante todas cosas que la funcion X esté representada por $\frac{1}{a+x}$; como despues de desenvuelta en serie, se convierte en

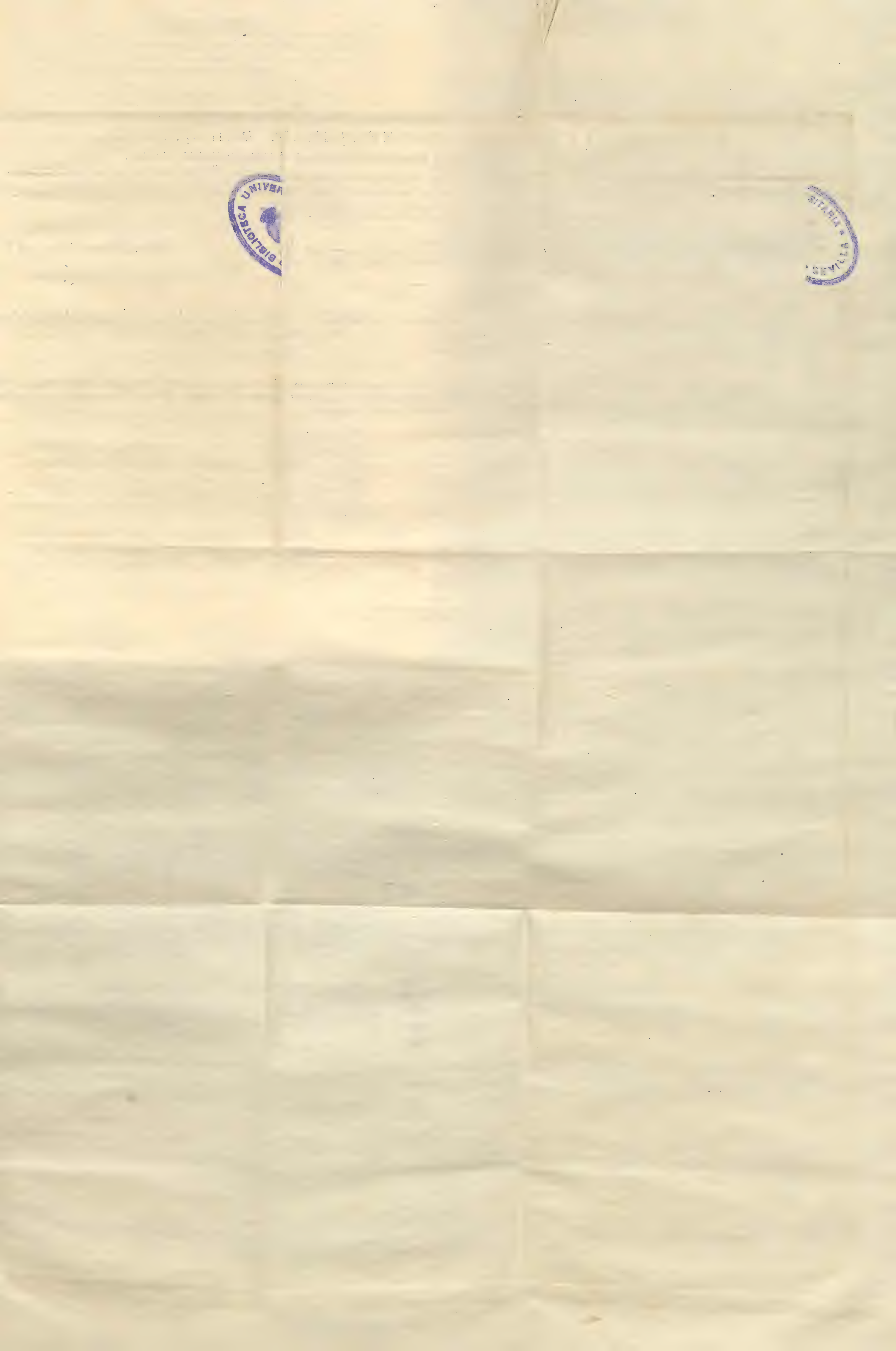
$\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\&c.$ resultará que

$$\text{S.}dz=\text{S.}\frac{dx}{a+x}=\text{S.}dx\left(\frac{1}{a+x}\right)=\text{S.}\left(\frac{dx}{a}-\frac{xdx}{a^2}+\frac{x^2dx}{a^3}-\frac{x^3dx}{a^4}+\&.\right)=$$

$\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-$ [illegible]

y como por otra [illegible] $\frac{dx}{[illegible]}=l.(a+x)$,

resultará $l.(a+x)=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}$ [illegible] $\&c.+const.$


BIBLIOTECA
SEVILLA

RECTIFICACION DE LA CIRCUNFERENCIA DEL CÍRCULO.

Por D. Josef Mariano Vallejo, Catedrático de Matemáticas del Seminario de Nobles de Madrid. Año 1803.

Si llamamos A un arco qualquiera de un círculo cuyo radio sea 1, por medio de las series ó el cálculo infinitesimal, sacaremos para el arco en valores de su tangente la fórmula siguiente: $A = \text{tangent.}A - \frac{\text{tangent.}^3A}{3} + \frac{\text{tangent.}^5A}{5} - \frac{\text{tangent.}^7A}{7} + \frac{\text{tangent.}^9A}{9} - \frac{\text{tangent.}^{11}A}{11} + \&c.$

[Tomo II Parte II. pág. 223.]

Si el arco es de 30° como sen. $30^o = \frac{1}{2}$, y cos. $= \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$, será tangent. $30^o = \frac{\text{sen. } 30^o}{\text{cos. } 30^o} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

luego arco de $30^o = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\times3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\times3^2\sqrt{3}} - \frac{1}{7\times3^3\sqrt{3}} + \frac{1}{9\times3^4\sqrt{3}} - \frac{1}{11\times3^5\sqrt{3}} + \&c.$

Y como la semicircunferencia equivale á seis veces el arco de 30° si multiplicamos por 6 será Semi $C = 6\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\times3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\times3^2\sqrt{3}} - \frac{1}{7\times3^3\sqrt{3}} + \frac{1}{9\times3^4\sqrt{3}} - \frac{1}{11\times3^5\sqrt{3}} + \&c.\right) =$

$$\frac{2\times3}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\times3} + \frac{1}{5\times3^2} - \frac{1}{7\times3^3} + \frac{1}{9\times3^4} - \frac{1}{11\times3^5} + \&c.\right) = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\times3} + \frac{1}{5\times3^2} - \frac{1}{7\times3^3} + \frac{1}{9\times3^4} - \frac{1}{11\times3^5} + \&c.\right).$$

Con el fin de que todos los términos sean positivos, reduciremos á uno cada dos términos de la expresion antecedente, y observando luego que en cada término el numerador se compone del numerador del antecedente mas 8, y el denominador del producto de los dos números ímpares que siguen á los del término anterior, multiplicado por una potencia de 3, cuyo exponente tiene dos unidades mas que el de la potencia del anterior, sacaremos

$$\text{Semi } C = 2\sqrt{3}\Big(\overset{1.^o}{\frac{8}{3\times3}} + \overset{2.^o}{\frac{16}{5\times7\times3^3}} + \overset{3.^o}{\frac{24}{9\times11\times3^5}} + \overset{4.^o}{\frac{32}{13\times15\times3^7}} + \overset{5.^o}{\frac{40}{17\times19\times3^9}} + \overset{6.^o}{\frac{48}{21\times23\times3^{11}}} + \overset{7.^o}{\frac{56}{25\times27\times3^{13}}} + \overset{8.^o}{\frac{64}{29\times31\times3^{15}}} + \overset{9.^o}{\frac{72}{33\times35\times3^{17}}} + \overset{10.^o}{\frac{80}{37\times39\times3^{19}}} + \overset{11.^o}{\frac{88}{41\times43\times3^{21}}} + \ldots$$

$$\overset{12.^o}{\frac{96}{45\times47\times3^{23}}} + \overset{13.^o}{\frac{104}{49\times51\times3^{25}}} + \overset{14.^o}{\frac{112}{53\times55\times3^{27}}} + \overset{15.^o}{\frac{120}{57\times59\times3^{29}}} + \overset{16.^o}{\frac{128}{61\times63\times3^{31}}} + \overset{17.^o}{\frac{136}{65\times67\times3^{33}}} + \overset{18.^o}{\frac{144}{69\times71\times3^{35}}} + \overset{19.^o}{\frac{152}{73\times75\times3^{37}}} + \overset{20.^o}{\frac{160}{77\times79\times3^{39}}} + \overset{21.^o}{\frac{168}{81\times83\times3^{41}}} + \overset{22.^o}{\frac{176}{85\times87\times3^{43}}} + \ldots$$

$$\overset{23.^o}{\frac{184}{89\times91\times3^{45}}} + \overset{24.^o}{\frac{192}{93\times95\times3^{47}}} + \overset{25.^o}{\frac{200}{97\times99\times3^{49}}} + \overset{26.^o}{\frac{208}{101\times103\times3^{51}}} + \overset{27.^o}{\frac{216}{105\times107\times3^{53}}} + \overset{28.^o}{\frac{224}{109\times111\times3^{55}}} + \overset{29.^o}{\frac{232}{113\times115\times3^{57}}} + \overset{30.^o}{\frac{240}{117\times119\times3^{59}}} + \overset{31.^o}{\frac{248}{121\times123\times3^{61}}} + \ldots$$

$$\overset{32.^o}{\frac{256}{125\times127\times3^{63}}} + \overset{33.^o}{\frac{264}{129\times131\times3^{65}}} + \overset{34.^o}{\frac{272}{133\times135\times3^{67}}} + \overset{35.^o}{\frac{280}{137\times139\times3^{69}}} + \overset{36.^o}{\frac{288}{141\times143\times3^{71}}} + \&c.\Big)$$

Sacando en decimales cada uno de estos términos y sumando luego, será

$1.^o = \frac{8}{3\times3} = \frac{8}{9} =$ 0,8888888888888888888888888888888888

$2.^o = \frac{16}{5\times7\times3^3} = \frac{16}{945} =$ 0,.1693121693121693121693121693121693I

$3.^o = \frac{24}{9\times11\times3^5} = \frac{8}{8019} =$ . . . . 0, . 99763062726025688988651951614914 5

$4.^o = \frac{32}{13\times15\times3^7} = \frac{32}{426465} =$ . . . . 0, . . 75035465981968039581208305488141

$5.^o = \frac{40}{17\times19\times3^9} = \frac{40}{6357609} =$ . . . . 0, . . 6291673489200106518032172157803

$6.^o = \frac{48}{21\times23\times3^{11}} = \frac{16}{28520667} =$ . . . . 0, . . . 560996697587752768895622251751

$7.^o = \frac{56}{25\times27\times3^{13}} = \frac{56}{1076168025} =$ . . . . 0, ... 52036483800938055188919035203

$8.^o = \frac{64}{29\times31\times3^{15}} = \frac{64}{12899667393} =$ . . . . 0, ...4961368231457624839242240763

$9.^o = \frac{72}{33\times35\times3^{17}} = \frac{8}{16572987585} =$ . . . . 0, ... 482713207800909602865668230

$10.^o = \frac{80}{37\times39\times3^{19}} = \frac{80}{1677143296881} =$ . . . . 0, ... 47700157851017734940910723

$11.^o = \frac{88}{41\times43\times3^{21}} = \frac{88}{18441602696889} =$ . . . . 0, ... 4771819534689635764272237

$12.^o = \frac{96}{45\times47\times3^{23}} = \frac{32}{663709410730 35} =$ . . . . 0, ... 482138711349399117553518

$13.^o = \frac{104}{49\times51\times3^{25}} = \frac{104}{2117374234998057} =$ . . . . 0, ... 49117439081379695349006

$14.^o = \frac{112}{53\times55\times3^{27}} = \frac{112}{22228616668737105} =$ . . . . 0, ...5038550156722962635001

$15.^o = \frac{120}{57\times59\times3^{29}} = \frac{40}{76934653026033843} =$ . . . . 0, ... 519921757318700567840

$16.^o = \frac{128}{61\times63\times3^{31}} = \frac{128}{2373718861919208331} =$ . . . . . . 0, ... 53923824785429284903

Suma de los $17^o, 18^o \ldots 24^o = \frac{192810784868765198812594590036000}{3467442379271734458595615625\times3^{46}} =$ 0, ...6273997662320455578

Suma de los $25^o, 26^o \ldots 30^o = \frac{125275433548806573423468840}{90998330298043028535675\times3^{59}} =$ . . . . 0, ... 97426805381

Suma de los $31^o, 32^o \ldots 36^o = \frac{3034773220355563117268704284 0}{72525875971853554996328 25\times3^{71}} =$ . . . 0, ... 146816

Suma total. = ... 0,9068996821171089252970391288210778 58

(A)

3,4641016151377545870548926830117447338
0,9068996821171089252970391288210778 58

31176914536239791283494034147105702 6042
. . 20784609690826527522329356098070468 40
. . 27712812921102036696439141464093957 8
. . . 311769145362397912834940341471057 02
. . . .31176914536239791283494034147105 70
. . . . 2078460969082652752232935609807 04
. . . . .277128129211020366964391414640 93
. . . . . . 69282032302755091741097853660 2
. . . . 3464101615137754587054892683 0
. . . . .346410161513775458705489268 3
. . . . 24248711305964282109384248 78
. . . . 3464101615137754587054892 6
. 2771281292110203669643914
. . . . 311769145362397912834940
. . . . .69282032302755091741 09
. 1732050807568877293527
. . . . 692820323027550917 41
. . . . .3117691453623979128 3
. . . . 24248711305964282 10
. . . . .103923048454132 63
. 3117691453623979
. . . . 346410161513 77
. . . . .692820323027 5
. . . . .277128129211 0
. . . . 27712812921 1
. 6928203230
. . . . 346410161
. . . . 24248711
. 2424871
. . . . 277128
. 17321
. 2771

3,14159265358979323846264338327950285580

Multiplicando ahora esto por $2\sqrt{3} = 3{,}4641016151377545870548926830117447338$, saldrá como se ve en (A)

Semi $C = 3{,}14159265358979323846264338327950285580$.

Este valor está sacado en el supuesto de ser $R=1$, y por consiguiente $D=2$; luego si suponemos $D=1$, será $C=3{,}14159265358979323846264338327950285580$.

Esta expresion de C conviene en los treinta y quatro guarismos decimales primeros, con la que Lagni nos presenta en las Memorias de la Academia de Ciencias de Paris, año 1719, que es $C=3{,}14159265358979323846264338327950288419$&c. hasta 127 guarismos decimales.

Para determinar esta constante, observaremos que como es independiente de x, el valor que tenga en un valor particular de x, lo tendrá en todos; y como haciendo $x=0$ resulta $l.(a)=const.$, tendremos pasando el valor de la constante al primer miembro

$$l.(a+x)-l.a=l.\left(\frac{a+x}{a}\right)=l.\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\&c.$$

resultado idéntico con el obtenido [§ 472] observando que alli x representa lo que aqui $\frac{x}{a}$.

647 Si tubiésemos la expresion $dz=\frac{adx}{a^2+x^2}$,

desenvolviendo en serie, será $dz=dx\left(\frac{1}{a}-\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^4}{a^5}-\frac{x^6}{a^7}+\&c.\right)$.

luego $z=\frac{x}{a}-\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}-\frac{x^7}{7a^7}+\&c.+const.$

más por otra parte [§ 550] sabemos que $\frac{adx}{a^2+x^2}=\frac{\frac{dx}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}}$

es la diferencial del arco cuya tangente es $\frac{x}{a}$;

luego tambien tendremos $S.\frac{adx}{a^2+x^2}=\text{arc.}\left(\text{tang}=\frac{x}{a}\right)$,

por lo qual arc. $\left(\text{tang.}=\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}-\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}-\&c.+const.$

Ahora, una misma tangente $\frac{x}{a}$ puede corresponder á muchos arcos; y como *todos estos arcos son iguales al menor junto con algunos quadrantes*, resulta que si queremos hallar el valor del menor de estos arcos, tendremos que como dicho arco menor es cero quando su tangente $\frac{x}{a}$ ó x es 0, resultará que suponiendo $\frac{x}{a}=0$ ó $x=0$, en la equacion anterior tendremos $0=const.$ y por lo mismo dicha equacion se convertirá en

$$\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}-\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}-\frac{x^7}{7a^7}+\&c.$$

que suponiendo $a=1$, será arc. $(\text{tang.}=x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\&c.$

648 Si la expresion fuese $dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, tendríamos

$$z = \text{S}.dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \text{S}.\left(dx + \tfrac{1}{2}x^2dx + \frac{1\times3}{2\times4}x^4dx + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}x^6dx + \&\text{c.}\right) = \ldots$$

$$x + \frac{1}{2\times3}x^3 + \frac{1\times3}{2\times4\times5}x^5 + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6\times7}x^7 + \&\text{c.} + const.$$

Pero la expresion $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ es la diferencial del arco z que tiene por seno x, luego tambien tendremos $\text{S}.\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arco}(\text{sen.} = x)$; y por las mismas razones que antes resultará para el arco menor que tiene x por seno, $\text{arco}(\text{sen.}=x) = x + \frac{1}{2\times3}x^3 + \frac{1\times3}{2\times4\times5}x^5 + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6\times7}x^7 + \&\text{c.}$

De la integracion de las cantidades logarítmicas y exponenciales.

649 Supongamos la fórmula $dz = Pdx(l.x)^n$ en la qual P sea una funcion algebráica de x, y tendremos [§ 635] que

$$z = Pdx(l.x)^n = (l.x)^n\text{S}.Pdx - \text{S}.d.(l.x)^n \times \text{S}.Pdx.$$

y como P es una funcion algebráica de x resultará que la $\text{S}.Pdx$ será exâcta, y si la llamamos N tendremos que $\text{S}.Pdx = N$; y como por otra parte $d.(l.x)^n = n(l.x)^{n-1}\frac{dx}{x}$, substituyendo estos valores en la expresion de z, será $z = N(l.x)^n - n\text{S}.\frac{dx}{x}(l.x)^{n-1}N$. Ahora, como N es una funcion algebráica, tendremos que la integral de $\frac{dx}{x}N$ tambien será algebráica, y llamándola M resultará que

como $d(l.x)^{n-1} = (n-1)\frac{dx}{x}(l\,x)^{n-2}$,

la misma advertencia nos dará

$$\text{S}.\frac{dx}{x}N \times (l.x)^{n-1} = M(l.x)^{n-1} - (n-1)\text{S}.\frac{dx}{x}(l.x)^{n-2}M,$$

luego $z = \text{S}.Pdx(l.x)^n = N(l.x)^n - nM(l.x)^{n-1} + n(n-1)S.\frac{dx}{x}(l.x)^{n-2}M.$

Pero si llamamos L la integral de $\frac{dx}{x}M$, la misma advertencia nos dará $S.\frac{dx}{x}(l.x)^{n-2}M=L(l.x)^{n-2}-(n-2)S.(l.x)^{n-3}\frac{dx}{x}L$,
luego $z=S.Pdx(l.x)^{n}=N(l.x)^{n}-nM(l.x)^{n-1}+\ldots$

$$n(n-1)L(l.x)^{n-2}-n(n-1)(n-2)S.\frac{dx}{x}(l.x)^{n-3}L.$$

Donde se ve que continnando del mismo modo quando n sea un número entero, como se le han de ir quitando sucesivamente unidades, llegaremos al fin á un factor $n-n$, el qual siendo cero hará desaparecer el último término que se halle afecto de la integral; y como todas las funciones N, M, L, &c. son algebráicas, resulta que *la funcion* $dz=Pdx(l.x)^{n}$ *tiene integral algebráica siempre que* n *sea un número entero*. Sea por exemplo $dz=x^{m}dx(l.x)^{2}$, y tendremos

1.° $S.x^{m}dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}=N.$

2.° $S.N\frac{dx}{x}=S.\frac{x^{m+1}}{m+1}\times\frac{dx}{x}=S.\frac{x^{m}}{m+1}dx=\frac{x^{m+1}}{(m+1)^{2}}=M.$

3.° $S.M\frac{dx}{x}=S.\frac{x^{m}}{(m+1)^{2}}dx=\frac{x^{m+1}}{(m+1)^{3}}=L$;

y como el término que deberia seguir tendria por coeficiente $n-2=2-2$, que en nuestro caso es cero, se sigue que ya no hay mas términos, y resultará que $z=S.x^{m}dx(l.x)^{2}=N(l.x)^{2}-2M(l.x)+\ldots$

$$2\times1\times L\times(l.x)^{0}=x^{m+1}\left(\frac{(l.x)^{2}}{m+1}-\frac{2(l.x)}{(m+1)^{2}}+\frac{2}{(m+1)^{3}}\right)+const.$$

650 Pasemos ahora á la integracion de las funciones exponenciales; más primero notaremos que siendo U una funcion algebráica de a^{x}, la integracion de $dz=Udx$ no presentaria ninguna dificultad; pues que haciendo $a^{x}=u$ tendríamos $xl.a=l.u$ de donde $x=\frac{l.u}{l.a}$, $dx=\frac{du}{ul.a}$; y substituyendo estos valores se convertiria dz en una diferencial algebraica con relacion á la variable u. Y así, si tubiéramos

$dz=\frac{a^{x}dx}{\sqrt{1+a^{nx}}}$ haciendo las substituciones resultaria

$$dz=\frac{udu}{ul.a\sqrt{1+u^{n}}}=\frac{du}{l.a\sqrt{1+u^{n}}}.$$

Si la equacion diferencial propuesta fuese $dz = Pa^x dx$, se la descompondria en dos factores $a^x dx \times P$, y siendo [§ 544] $d.a^x = l.a \times a^x dx$, resultará que $a^x = S.l.a \times a^x dx = l.a S.a^x dx$, y $S.a^x dx = \frac{a^x}{l.a}$; por lo qual tendremos $z = \frac{1}{l.a} Pa^x - \frac{1}{l.a} S.a^x d.P (1)$. &c.

Haciendo $d.P = Qdx, dQ = Rdx, dR = Tdx$,

y continuando la reduccion de antes, se hallará esta serie

$$z = S.Pa^x dx = \frac{1}{l.a} Pa^x - \frac{1}{(l.a)^2} Qa^x + \frac{1}{(l.a)^3} Ra^x \ldots \pm \frac{1}{(l.a)^n} S.Ua^x dx,$$

donde el signo + corresponde si el término ocupa un lugar ímpar, y el − si ocupa un lugar par.

Si hubiéramos integrado al principio el factor Pdx, y á su integral la hubiéramos llamado N, hubiéramos tenido $z = a^x N - (l.a) S.Na^x dx$, y continuándola despues de haber supuesto $S.Ndx = M, S.Mdx = L$, &c. resultará $S.Pa^x dx = a^x N - (l.a) a^x M + (l.a)^2 a^x L \ldots \pm (l.a)^n S.Ga^x dx$, donde se debe hacer en punto á los signos la misma advertencia que antes.

651 La aplicacion de la primera fórmula conducirá á la integral exâcta, siempre que P sea una funcion racional y entera; porque entonces el número de las cantidades $Q = \frac{dP}{dx}, R = \frac{dQ}{dx}, T = \frac{dR}{dx}$ &c. será limitado, la última U será constante y por consiguiente $S.Ua^x dx$ se mudará en $US.a^x dx = U.\frac{a^x}{l.a} + const.$

Sea por exemplo $P = x^n$, designando n un número entero positivo; con lo qual se tendrá $dP = nx^{n-1} dx$;

y la equacion (1) se convertirá en $z = S.a^x x^n dx = \frac{a^x x^n}{l.a} - \frac{n}{l.a} S.a^x x^{n-1} dx$

y continuando se hallará

$$Q = nx^{n-1},\ R = n(n-1)x^{n-2},\ T = n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$

de donde $z = S.a^x x^n dx = a^x \left(\frac{x^n}{l.a} - \frac{nx^{n-1}}{(l.a)^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(l.a)^3} - \ldots \right.$

$$\left. \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{(l.a)^4} \ldots \pm \frac{n(n-1) \ldots 1}{(l.a)^{n-1}} \right) + const.$$

652 La segunda fórmula no conviene sino al caso en que las cantidades $N = S.Pdx, M = S.Ndx, L = S.Mdx$ &c.
se pueden obtener algebráicamente; pero se aplica con suceso al exemplo de arriba quando n es un número entero negativo, porque entonces se tiene $P = \frac{1}{x^n}$, $N = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$;

$$M = \frac{1}{(n-1)(n-2)x^{n-2}};\ L = -\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}} \ \&c.$$

de donde

$$S.\frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a^x l.a}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \ldots \frac{a^x (l.a)^2}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}} \ldots - \frac{a^x (l.a)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1 \times x} + \frac{(l.a)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1} S.\frac{a^x dx}{x}$$

No se podria continuar la reduccion mas alla de $S.\frac{a^x dx}{x}$, porque la equacion $S.Pa^x dx = a^x N - l.a S.Na^x dx$, de que se sacan todas estas reducciones, se convierte en $S.\frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{l.a}{n-1} S.\frac{a^x dx}{x^{n-1}}$, cuyos términos se convierten en ∞ quando $n=1$. Más la expresion $\frac{a^x dx}{x}$ aun no se sabe integrar exâctamente; y si esto se pudiese hacer se tendria tambien la de $a^x x^n dx$ en todos los casos en que n fuese un número entero. Quando n es un número fraccionario, las dos series de que hemos hecho uso, no se terminan.

De la integracion de las funciones circulares.

653 Supongamos la expresion $z = S.Xdx \times \text{arc.}(\text{sen.} = x)$; si se integra al principio el factor Xdx, observando [§ 550] que $d.\text{arc.}(\text{sen.} = x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, y haciendo $S.Xdx = V$, se tendrá

$$S.Xdx \times \text{arc.}(\text{sen.} = x) = V \times \text{arc.}(\text{sen.} = x) - S.\frac{Vdx}{\sqrt{1-x^2}};$$

luego la integracion de la fórmula propuesta, se referirá á una funcion algebráica si V lo es; como $d.\,\text{arc.}(\text{cos.} = x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, y $d.\,\text{arc.}(\text{tang.} = x) = \frac{dx}{1+x^2}$ se tendrá, obrando del mismo modo que

antes, que $S.Xdx \times \text{arco}(\cos.=x)=V \times \text{arc.}(\cos.=x)+S.\frac{Vdx}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$S.Xdx \times \text{arc.}(\text{tang.}=x)=V \times \text{arc.}(\text{tang.}=x)-S.\frac{Vdx}{1+x^2},$$

y la integracion de estas fórmulas no dependerá sino de una funcion algebráica, siempre que V sea algebráica.

654 Si representamos por z un arco cuyo seno, coseno ó tangente &c. esten expresados en funciones de x, es decir, que se tenga $dz=X'dx$, siendo X' una funcion dada de x, se obtendrá $S.Xz^n dx$, por un procedimiento semejante al de los artículos precedentes. Para esto haremos $S.Xdx=V$ y se tendrá $S.Xz^n dx=Vz^n-nS.Vz^{n-1}dz$, poniendo en vez de dz su valor $X'dx$, y haciendo $S.VX'dx=U$,

se hallará $S.Vz^{n-1}dz=Uz^{n-1}-(n-1)S.Uz^{n-2}dz$.

Continuando de este modo, iremos rebaxando cada vez una unidad al exponente de z, y se llegará en fin á hacer desaparecer este arco, si n es un número entero positivo.

El caso mas simple es aquel en que $X=1$ y en que z es el arco cuyo seno$=x$, y entonces resulta $dz=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $V=x$,

$$U=S.\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=S.\frac{-2xdx}{-2\sqrt{1-x^2}}=-S.\frac{-2xdx}{2\sqrt{1-x^2}}=[\S\,525]-\sqrt{1-x^2},$$

y continuando se hallaria $T=-x, R=-S.\frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-x^2}$, $Q=x$ &c.

y estos valores dan

$$S.z^n dx=xz^n+nz^{n-1}\sqrt{1-x^2}-n(n-1)z^{n-2}x-n(n-1)(n-2)z^{n-3}\sqrt{1-x^2}+\&c.$$

Serie que se termina quando n es un número entero positivo.

Si se tubiese $Xdx=dz$ ó $X=X'$, la integral se mudaria en

$$S.z^n dz=\frac{z^{n+1}}{n+1}+const.$$

655 Puesto que [§ 549],

$d.\text{ sen. } nu = ndu.\text{ cos. } nu.$
$d.\text{ cos. } nu = -ndu.\text{ sen. } nu.$
$d.\text{ tang. } nu = \frac{ndu}{(\text{cos.} nu)^2}.$
$d.\text{ cot. } nu = -\frac{ndu}{(\text{sen. } nu)^2}.$
$d.\text{ sec. } nu = \frac{ndu.\text{ sen. } nu}{(\text{cos.} nu)^2}.$
$d.\text{ cosec. } nu = -\frac{ndu.\text{ cos. } nu}{(\text{sen. } nu)^2}.$

será

$\text{S.}du.\text{ cos.}nu = \frac{1}{n}\text{ sen.}nu + const.$
$\text{S.}du.\text{ sen.}nu = -\frac{1}{n}\text{ cos.}nu + const.$
$\text{S.}\frac{du}{(\text{cos. } nu)^2} = \frac{1}{n}\text{ tang.}nu + const.$
$\text{S.}\frac{du}{(\text{sen. } nu)^2} = -\frac{1}{n}\text{ cot.}nu + const.$
$\text{S.}\frac{du.\text{ sen. } nu}{(\text{cos. } nu)^2} = \frac{1}{n}\text{ sec.}nu + const. = \frac{1}{n.\text{ cos. } nu} + const.$
$\text{S.}\frac{du.\text{ cos } nu}{(\text{sen. } nu)^2} = -\frac{1}{n}\text{ cosec.}nu. + cons. = -\frac{1}{n.\text{ sen. } nu} + const.$

De estas integraciones resulta la de las expresiones
$du(A + B\text{ sen. } u + C.\text{ sen. } 2u + D.\text{ sen. } 3u +$ &c.
$du(A + B\text{ cos. } u + C.\text{ cos. } 2u + D.\text{ cos. } 3u +$ &c.
que dan $\begin{cases} Au - B.\text{ cos. } u - \frac{1}{2} C.\text{ cos. } 2u - \frac{1}{3} D.\text{ cos. } 3u - \&c. + const. \\ Au + B.\text{ sen. } u + \frac{1}{2} C.\text{ sen. } 2u + \frac{1}{3} D.\text{ sen. } 3u + \&c. + const. \end{cases}$

Método general para obtener los valores aproxîmados de las integrales.

656 El desarrollo de las integrales en serie, no conduce á una aproxîmacion sino quando las series que se obtienen por este medio son convergentes, lo que no sucede siempre. Por esta causa han procurado los Analistas buscar los medios de obtener valores aproxîmados de las integrales, qualesquiera que sean las funciones diferenciales propuestas. Vamos á exponer aqui lo que ha dado Euler sobre este punto en su tratado de cálculo integral.

Sea Xdx la diferencial que se trata de integrar; por esta causa $\text{S.}Xdx$ es una cantidad indeterminada en un cierto sentido, pues que debe comprender una constante arbitraria, lo qual se confirma tambien por las consideraciones siguientes. Si se hace
$\text{S.}Xdx = z$, se tendrá $Xdx = dz$, $\frac{dz}{dx} = X$, $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dX}{dx}$, $\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{d^2X}{dx^2}$, &c.

pero como el conocimiento de estos coeficientes diferenciales no basta para determinar el desarrollo de z, es necesario añadir el del valor particular de z, quando $x=0$; luego todo lo que se puede hacer por medio de las expresiones dadas de $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ &c. es pasar del valor de $S.Xdx$, tomado para un cierto valor de x, al que responde á otro valor de x.

Sea por exemplo Z el valor de $S.Xdx$ correspondiente á $x=a$, y Z_1 el que es relativo á $x=a_1$, y haciendo en la fórmula [(o) § 535] $x=a, k=a_1-a$; y señalando por Z', Z'', Z''', &c. los valores de X, $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$ &c., tomados en la hipótesis de $x=a$, resultará $Z_1=Z+Z'\frac{(a_1-a)}{1}+Z''\frac{(a_1-a)^2}{1\times 2}+Z'''\frac{(a_1-a)^3}{1\times 2\times 3}+$ &c. donde se ve que si ninguno de los coeficientes Z, Z', Z'', Z''', &c. se convierte en infinito, y a_1 no se diferencia mucho de a, se podrá determinar exâctamente el valor de Z_1.

Llamando Z_2 el valor de $S.Xdx$ relativamente á un tercer valor de x señalado por a_2, y representando por Z_1, Z_1', Z_1'', Z_1''', &c., que vienen á ser X, $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$ &c. quando $x=a_1$ se tendrá

$$Z_2=Z_1+Z_1'\frac{(a_2-a_1)}{1}+Z''_1\frac{(a_2-a_1)^2}{1\times 2}+Z_1'''\frac{(a_2-a_1)^3}{1\times 2\times 3}+\text{\&c.}$$

del mismo modo se puede continuar para una serie de valores de x, representados por a_3, a_4, &c. á los quales se suponga que responden valores de $S.Xdx$, señalados por Z_3, Z_4, &c.

657 Ahora, si concebimos que se hayan tomado cada una de las cantidades a_1, a_2, a_3, a_4 &c. de manera que las diferencias que tengan entre sí sean bastante pequeñas paraque el quadrado y las potencias superiores de a_1-a, a_2-a_1, a_3-a_2, &c. no influyan en el resultado, tendremos las siguientes aproxîmaciones, despreciando los términos que hay desde el tercero en adelante.

$$Z_1=Z+Z'(a_1-a);\ Z_2=Z_1+Z'_1(a_2-a_1);$$
$$Z_3=Z_2+Z'_2(a_3-a_2);\ Z_4=Z_3+Z'_3(a_4-a_3)\text{\&c.}$$

Substituyendo ahora el valor de Z_1 en el de Z_2, el de Z_2 en el de Z_3 y así sucesivamente, se hallará

$$Z_1=Z+Z'(a_1-a); Z_2=Z+Z'(a_1-a)+Z'_1(a_2-a_1),$$
$$Z_3=Z+Z'(a_1-a)+Z'_1(a_2-a_1)+Z'_2(a_3-a_2),$$
$$Z_4=Z+Z'(a_1-a)+Z'_1(a_2-a_1)+Z'_2(a_3-a_2)+Z'_3(a_4-a_3)\text{\&c.}$$

De este modo nos podemos elevar á una expresion aproxîmada de S.Xdx relativa al valor de x que se quiera.

Supongamos que a_n represente el último término de la serie a, a_1, a_2, &c. y que Z_n sea el valor de S.Xdx correspondiente á $x = a_n$; segun los valores precedentes se formará la expresion aproxîmada de Z_n continuando hasta el término $Z'_{n-1}(a_n - a_{n-1})$, en la qual Z'_{n-1} expresa el valor que toma X quando se substituye en vez de x, a_{n-1}; luego tendremos

$$Z_n = Z + Z'(a_1 - a) + Z'_1(a_2 - a_1) + Z'_2(a_3 - a_2) + \ldots Z'_{n-1}(a_n - a_{n-1}).$$

Si las diferencias $a_1 - a, a_2 - a_1, a_3 - a_2$, &c. las suponemos iguales con α, el valor precedente de Z_n,

se convertirá en $Z_n = Z + \alpha(Z' + Z'_1 + Z'_2 + Z'_3 \ldots Z'_{n-1})$.

Estos valores serán tanto mas exâctos quanto mas se aproxîmen unas á otras las cantidades a, a_1, a_2, &c.

658 Las consideraciones precedentes hacen ver en qué *se diferencia la integral* S.Xdx, *de una funcion primitiva dada*, que comprenda x y constantes determinadas. El valor de esta última quedará determinado quando se haya señalado el que se quiere atribuir á x; más la misma operacion no hará en la primera mas que fixar donde se debe detener la serie $Z, Z'(a_1 - a), Z'_1(a_2 - a_1), Z'_2(a_3 - a_2)$ &c. y la suma de esta serie quedará aun indeterminada mientras no se haya establecido nada acerca del valor de x, á que debe responder el primer término, y el valor que recibe dicho término en este caso.

De aqui se sigue que la integral S.Xdx es una funcion de X, cuyo valor se halla comprendido entre dos límites que son indeterminados. Esta conseqüencia merece la mayor atencion, y se puede deducir inmediatamente de la exîstencia de la constante arbitraria.

Hagamos S.$Xdx = P$, siendo P la funcion de x que da inmediatamente el procedimiento de la integracion; el valor completo de S.Xdx será $P + const.$ Señalando á x dos valores particulares a y b, y llamando A y B los que toma P en estas hipótesis, se tendrá $A + const.$ para la primera, y $B + const.$ para la segunda; y tomando la diferencia se hallará $A - B$, resultado independiente de la constante arbitraria, y que no es otra cosa que la suma de la serie de arriba tomada desde el término correspondiente á $x = a$ hasta el término correspondiente á $x = b$.

659 Quando se determina la constante suponiendo que la integral reciba un cierto valor por uno que se haya dado á x, no se hace mas que fixar uno de los términos de la serie, Z por exemplo, del qual se parte despues para formar los otros; y la integral entra entonces en el caso de las funciones primitivas que no exîgen para su determinacion sino la de la variable que encierran. Se debe advertir que el primer término Z es absolutamente independiente de todos los otros, y no influye sobre ninguno de ellos sino solo sobre su suma total.

Si pasamos la Z al primer miembro de la equacion del párrafo [657], tendremos $Z_n - Z = Z'(a_1 - a) + Z'_1(a_2 - a_1) \ldots Z'_{n-1}(a_n - a_{n-1})$; donde se ve que la diferencia $Z_n - Z$ será positiva si todos los coeficientes Z', Z'_1, &c. son positivos y se tiene $a_n > a$, porque siempre se puede, qualesquiera que sean estas dos últimas cantidades, pasar de la una á la otra por una serie de intermedias tan aproxîmadas como se quiera, y llevar así el grado de exâctitud de la equacion de arriba, tan lejos como se juzgue á propósito. De donde se sigue que *la diferencia entre los dos valores de la integral* S.Xdx *correspondientes á* $x = a_n$ *y á* $x = a$, *será positiva si ademas de ser* $a_n > a$ *el coeficiente diferencial* X *permanece siempre positivo desde el uno de estos valores hasta el otro.* Esta consideracion nos va á servir para obtener los dos límites entre que se halla comprendida una integral qualquiera.

660 Como hemos hecho ver [658] que en una integral no hay determinado mas que la diferencia entre dos de sus valores tomados relativamente á dos valores dados de x, resulta que si señalamos por Z_a y por Z_b los valores de S.Xdx, quando $x = a$ y $x = b$, no tendremos mas que hallar los límites de la cantidad $Z_b - Z_a$. Sea M el valor mayor, y m el menor de los que toma el coeficiente diferencial X por la substitucion de los valores de x, desde a hasta b inclusivamente; las cantidades $M - X$ y $X - m$ permanecerán necesariamente positivas en todo este intervalo, y por consiguiente las diferencias entre los valores de S.$(M - X)dx$ y de S.$(X - m)dx$ relativas á $x = a$, y las que corresponden á $x = b$ serán [659] positivas; pero como M y m son constantes, se tendrá S.$(M - X)dx = Mx -$ S.Xdx, S.$(X - m)dx =$ S.$Xdx - mx$.

Haciendo sucesivamente $x = a$ y $x = b$ en el primero de estos valores, resulta $Ma - Z_a$, $Mb - Z_b$; la segunda da en los mismos supuestos $Z_a - ma$, $Z_b - mb$; y las diferencias $Mb - Z_b - (Ma - Z_a)$, $Z_b - mb - (Z_a - ma)$ debiendo ser positivas segun lo que precede, se tendrá $Mb - Z_b > Ma - Z_a$; $Z_b - mb > Z_a - ma$,

que dan $Mb - Ma > Z_b - Z_a$; $mb - ma < Z_b - Z_a$.

Luego el valor de $Z_b - Z_a$ se halla entre los de $M(b - a)$, y de $m(b - a)$.

Se debe observar que la cantidad M debe ser el menor valor negativo de X, quando este coeficiente los tenga tales desde $x = a$ hasta $x = b$; porque solo de este modo la cantidad $M - X$ que se muda en $X - M$ permanece siempre positiva en este intervalo. Por la misma razon se debe siempre tomar para m el mayor valor negativo de X,

quando este coeficiente los tiene de esta especie, entre los que recibe desde $x=a$ hasta $x=b$, á fin de que la cantidad $X-m$ que se convierte en $m-X$ en este caso, sea aun positiva.

Si la diferencial Xdx fuese de la forma $PQdx$, y se pudiese integrar el factor Qdx se tomarian para M el mayor valor de la funcion P, y y para m el menor, y representando S.Qdx por V se tendria

S.$(MQ-PQ)dx=MV-$S.$PQdx$; S.$(PQ-mQ)dx=$S.$PQdx-mV$;

y calculando como antes las diferencias de los valores que reciben estos resultados en las hipótesis de $x=a$ y de $x=b$,

se hallaria $MV_b-MV_a>Z_b-Z_a$; $mV_b-mV_a<Z_b-Z_a$.

661 Antes de pasar mas adelante vamos á hacer conocer como indican los Analistas las diversas circunstancias en que se consideran las integrales. Quando quieren expresar el valor general de S.Xdx, lo llaman entonces *integral indeterminada*, y su expresion, para ser *completa*, debe contener una *constante arbitraria* añadida á la *funcion primitiva* obtenida por la integracion. Esta constante se determina, como hemos hecho en muchas ocasiones, sujetando la expresion S.Xdx á tomar un valor dado quando x recibe otro tambien dado.

Quando en una integral, cuya constante arbitraria se ha determinado, se da á la variable x un valor determinado, esta integral se halla tambien determinada por esto, y se llama entonces la *integral determinada*; así, si se trata del valor que toma por el supuesto de $x=b$ la integral S.Xdx sujeta ya á convertirse en Z quando $x=a$, esta integral queda entonces determinada.

En fin, quando se valúa la diferencia entre los valores de S.Xdx relativos á $x=a$ y á $x=b$, es de todo punto independiente de la constante arbitraria, y esto se llama *tomar la integral* S.Xdx *desde* x=a *hasta* x=b.

662 La serie [(n) 535] que expresa el teorema de Taylor da dos desarrollos de la integral S.Xdx. En efecto, si llamamos z á esta integral, será $z=f.x=$S.Xdx, y llamando Z, Z', Z'',&c. á los valores que

toman $z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3}$, &c. ó S.$Xdx, X, \frac{dX}{dx}, \frac{d^2X}{dx^2}, \frac{d^3X}{dx^3}$, &c.

quando $x=0$, será $z=$S.$Xdx=Z+Z'\frac{x}{1}+Z''\frac{x^2}{1\times2}+Z'''\frac{x^3}{1\times2\times3}+$ &c.

serie en la qual Z hace oficios de la constante arbitraria.

Partiendo del valor general de S.Xdx que representaremos por z, para venir á parar al que responde á $x=0$, se necesita hacer $k=-x$ en la fórmula [(o) 535] (*) lo que dará

(*) *Esto debe ser así, porque aquella expresion es la de una funcion de* x'=x+k, *y si* x' *que es la variable ha de ser cero, será* x+k=0, *de donde* x=-k.

$$Z = z - \frac{dz}{dx} \times \frac{x}{1} + \frac{d^2z}{dx^2} \times \frac{x^2}{1 \times 2} - \frac{d^3z}{dx^3} \times \frac{x^3}{1 \times 2 \times 3} + \&c.$$

y volviendo á poner en esta equacion en vez de z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, &c. sus valores, y despejando $S.Xdx$,

se tendrá $S.Xdx = Z + X \times \frac{x}{1} - \frac{dX}{dx} \times \frac{x^2}{1 \times 2} + \frac{d^2X}{dx^2} \times \frac{x^3}{1 \times 2 \times 3} - \&c.$

donde la cantidad Z hace aun aqui los oficios de la constante arbitraria.

663 La integracion conduce tambien á este desarrollo. En efecto, si se descompone la diferencial Xdx en los dos factores X y dx, y se integra el segundo, se tendrá [§635] $S.Xdx = Xx - S.xdX$;

pero $S.xdX = S.\frac{dX}{dx} \times xdx = \frac{1}{2}x^2 \frac{dX}{dx} - \frac{1}{2} S.x^2 \frac{d^2X}{dx}$,

$S.x^2 \frac{d^2X}{dx} = S.\frac{d^2X}{dx^2} \times x^2dx = \frac{1}{3}x^3 \frac{d^2X}{dx^2} - \frac{1}{3} S.x^3 \frac{d^3X}{dx^2}$,

$S.x^3 \frac{d^3X}{dx^2} = S.\frac{d^3X}{dx^3} \times x^3dx = \frac{1}{4}x^4 \frac{d^3X}{dx^3} - \frac{1}{4} S.x^4 \frac{d^4X}{dx^3}$, &c.;

colocando sucesivamente en vez de $S.xdX$, $S.x^2\frac{d^2X}{dx}$, &c. sus valores,

resultará $S.Xdx = X \times \frac{x}{1} - \frac{dX}{dx} \times \frac{x^2}{1 \times 2} + \frac{d^2X}{dx^2} \times \frac{x^3}{1 \times 2 \times 3} - \&c.$

y paraque la expresion de la integral sea completa, será necesario añadir una constante á su desarrollo, con lo que vendrá á ser semejante al precedente. Esta serie que se debe á Juan Bernoulli es con relacion al cálculo integral, lo que el teorema de Taylor es con relacion al cálculo diferencial. Estas integraciones que hemos efectuado sobre la expresion $S.Xdx$ se llaman *integraciones por partes.*

664 Hasta ahora no hemos considerado sino *el coeficiente diferencial de primer órden*; más, sino se conociese sino el coeficiente diferencial del segundo órden, se necesitarian entonces dos integraciones sucesivas para remontar á la funcion primitiva de donde saca su orígen. Sea X el coeficiente diferencial del segundo órden de la funcion z; con lo qual se tendrá $\frac{d^2z}{dx^2} = X$, y multiplicando los dos miembros por dx, resultará $\frac{d^2z}{dx} = Xdx$; pero $\frac{d^2z}{dx}$ es la diferencial de $\frac{dz}{dx}$ tomada en el supuesto de

ser dx constante; luego se tendrá $\frac{dz}{dx}=S.Xdx$. Representemos por P la funcion primitiva de x, igual con $S.Xdx$, y por C la constante arbitraria, y tendremos $\frac{dz}{dx}=P+C$; multipliquemos despues los dos miembros por dx, y encontraremos $dz=Pdx+Cdx$, é integrando resultará $z=S.Pdx+Cx+C'$ (1), siendo C' una segunda constante arbitraria. Si se vuelve á poner ahora $S.Xdx$ en vez de P, será $z=S.dxS.Xdx+Cx+C'$ expresion que encierra dos integraciones sucesivas.

Esta expresion se puede referir á dos integrales simples, por medio de la integracion por partes; porque substituyendo P en vez de $S.Xdx$, se tendrá $S.Pdx=Px-S.xdP=xS.Xdx-S.Xxdx$; y por consiguiente la equacion (1) se convertirá en $z=xS.Xdx-S.Xxdx+Cx+C'$.

665 Si suponemos ahora que X sea el coeficiente diferencial de tercer órden de la funcion z, se tendrá $\frac{d^3z}{dx^3}=X$; de donde $\frac{d^3z}{dx^2}=Xdx$;

y como $\frac{d^3z}{dx^2}=d.\frac{d^2z}{dx^2}$ considerando á dx como constante,

se tendrá $\frac{d^2z}{dx^2}=S.Xdx+C$, lo que da $\frac{d^2z}{dx}=dxS.Xdx+Cdx$;

integrando de nuevo resultará $\frac{dz}{dx}=S.dxS.Xdx+Cx+C'$,

ó por lo dicho antes $\frac{dz}{dx}=xS.Xdx-S.Xxdx+Cx+C'$,

de donde resulta $dz=xdxS.Xdx-dxS.Xxdx+Cxdx+C'dx$,
é integrando será $z=S.xdxS.Xdx-S.dxS.Xxdx+\frac{1}{2}Cx^2+C'x+C''$,
siendo C'' la constante nuevamente introducida por la última integracion. Pero [§ 635] $\begin{cases} S.xdxS.Xdx=\frac{1}{2}x^2S.Xdx-\frac{1}{2}S.Xx^2dx, \\ S.dxS.Xdx=xS.Xxdx-S.Xx^2dx(*); \end{cases}$
luego substituyendo estos valores, y reduciendo, se hallará

$$z=\tfrac{1}{2}(x^2S.Xdx-2xS.Xxdx+S.Xx^2dx)+\tfrac{1}{2}(Cx^2+2C'x+2C'').$$

666 Las integrales sucesivas se indican de este modo. Quando X expresa el coeficiente diferencial del segundo órden, se tiene

---

(*) *Porque deberia ser* S.dxS.Xxdx=xS.Xxdx—S.xxd.S.Xxdx, *y como la* d *con la* S. *se destruyen pues la operacion que indica la una es opuesta á la de la otra, resulta lo que tenemos puesto.*

$d^2z=Xdx^2$, y tomando la integral de cada miembro se halla $dz=\text{S}.Xdx^2$, é integrando otra vez resulta $z=\text{S.S}.Xdx^2=\text{S}.^2Xdx^2$.

Quando X expresa el coeficiente diferencial de tercer órden, se tiene del mismo modo $d^2z=\text{S}.Xdx^3, dz=\text{S.S}.Xdx^3; z=\text{S.S.S}.Xdx^3=\text{S}.^3Xdx^3$, y así sucesivamente para los órdenes superiores.

Tambien se verifican por la diferenciacion las equaciones siguientes $\text{S}.Xdx^2=dx\text{S}.Xdx$; $\text{S.S}.Xdx^2=\text{S}.dx\text{S}.Xdx$; $\text{S}.Xdx^3=dx^2\text{S}.Xdx$; $\text{S.S}.Xdx^3=\text{S}.dx^2\text{S}.Xdx=dx\text{S}.dx\text{S}.Xdx$; $\text{S.S.S}.Xdx^3=\text{S}.dx\text{S}.dx\text{S}.Xdx$ &c. cuyas equaciones nos dicen que se pueden hacer salir fuera de la última, todos los factores de dx excepto uno; lo qual se debe verificar, porque siendo dx constante, dx^n tambien lo será, y se podrá sacar fuera de la S. que indica la integral.

En estas equaciones cada signo S. de integracion comprende á todos los que le siguen, y no se puede dexar debaxo del último nada mas que la primera potencia de dx.

Esto supuesto, despreciando las constantes arbitrarias é integrando por partes como antes, se tendrá

$$\text{S}.Xdx=\text{S}.Xdx\times\text{S}.^2Xdx^2=\tfrac{1}{1}(x\text{S}.Xdx-\text{S}.Xxdx);$$

$$\text{S}.^3Xdx^3=\frac{1}{1\times2}(x^2\text{S}.Xdx-2x\text{S}.Xxdx+\text{S}.Xx^2dx);$$

$$\text{S}.^4Xdx^4=\frac{1}{1\times2\times3}(x^3\text{S}.Xdx-3x^2\text{S}.Xxdx+3x\text{S}.Xx^2dx-\text{S}.Xx^3dx)\&c.$$

Los coeficientes numéricos de los términos de las expresiones que hay dentro de los paréntesis son los mismos que los de las potencias del binomio $a-b$, y mientras que el exponente de x fuera del signo S. disminuye una unidad en cada término, yendo hácia la derecha, su exponente debaxo de este signo aumenta en la misma cantidad.

Se restituirán las constantes arbitrarias que hemos omitido en esta fórmula, añadiendo á la primera C, á la segunda $Cx+C'$, á la tercera $Cx^2+C'x+C''$, á la quarta $Cx^3+C'x^2+C''x+C'''$, &c.

667 Las diferenciales que hemos considerado hasta ahora estan tomadas considerando á dx como constante; porque son las solas que no encierran mas de un coeficiente diferencial. En efecto, quando al diferenciar se hace variar al mismo tiempo dx en la expresion $dz=Adx$, se tiene $d^2z=Bdx^2+Ad^2x$; luego si nos propusiésemos la diferencial Udx^2+Vd^2x, seria necesario, paraque significase algo, que se hubiera tenido $V=A$ y $U=B$, de donde resulta que siendo $B=\frac{dA}{dx}$, se tendrá $U=\frac{dV}{dx}$, y quedando satisfecha esta condicion, no se tendria

mas que integrar el primer término Udx^2 que se convierte, substituyendo por U su valor $\frac{dV}{dx}$ en Vdx, y su integral será $S.Vdx$.

Estas advertencias se pueden extender á las diferenciales de un órden qualquiera.

Aplicacion del cálculo integral á la quadratura de las curvas y á su rectificacion; á la quadratura de las superficies curvas, y á la valuacion de los volúmenes que comprenden.

668 Puesto que la diferencial del espacio comprendido entre las coordenadas de una curva y el arco que le corresponde, está representado [624] por zdx, y que z es una funcion de la abscisa x que podremos representar por X, resulta que *el problema general de la quadratura de las curvas se reduce á la integracion de la diferencial* Xdx. Lo que precede contiene una breve exposicion de los principales métodos analíticos hallados hasta ahora, para efectuar esta integracion, ya sea rigorosamente ya sea de una manera aproxîmada; y aqui no tratamos sino de la aplicacion de estos métodos á las curvas mas conocidas.

Aquellas cuya equacion es mas simple son las parábolas de diversos órdenes, representadas [265] por la equacion $z^n = ax^m$;

de donde resulta $z = a^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}$, y por consiguiente

$$S.Xdx = S.zdx = S.a^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{a^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + const. = \frac{na^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m+n}{n}}}{m+n} + const.$$

donde se ve que todas estas curvas son *quadrables*; es decir, que se tiene la expresion finita y algebráica de la superficie del segmento comprendido entre su arco, el exe de las abscisas y la ordenada.

Con la expresion de este segmento, es fácil de calcular el de qualquier otro espacio contenido entre una porcion de la curva, y de las lineas rectas que forman con las abscisas y las ordenadas, polígonos de que la Geometría elemental dé la superficie.

Estas curvas propuestas pasan por el orígen de las abscisas, pues que si suponemos $x=0$ resulta $z=0$; si se quiere expresar su superficie partiendo de este punto, es necesario suprimir la constante arbitraria,

pues que la expresion $\frac{na^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}$ se aniquila tambien quando se hace en ella $x=0$.

669 Para tener despues la superficie BCMP (fig. 214) comprendida entre las ordenadas BC y PM correspondientes á las abscisas AB$=b$ y AP$=x$, bastará quitar de $\frac{na^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}$ que expresa la superficie ACMP la cantidad $\frac{na^{\frac{1}{n}}b^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}$ igual á la superficie ACB,

y así se tendrá BCMP$=\frac{na^{\frac{1}{n}}}{m+n}\left(x^{\frac{m+n}{n}}-b^{\frac{m+n}{n}}\right)$.

Quando el exponente n es par, la expresion $\frac{na^{\frac{1}{n}}}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ es susceptible del doble signo $\pm$; y como entonces las mismas abscisas AP pertenecen á dos ramas de curva ACM y Acm se tienen dos segmentos ACMP y Acmp; el que contiene las ordenadas positivas tiene un valor positivo, y el otro tiene un valor negativo.

Quando los exponentes m y n son ambos ímpares, la cantidad $x^{\frac{m+n}{n}}$ no tiene mas que un signo, y permanece siempre positiva qualquiera que sea el valor de x; pero en este caso ambos ramos de la curva propuesta tienen sus abscisas y ordenadas negativas á un tiempo, de donde se sigue que las superficies correspondientes á abscisas y ordenadas negativas se deben mirar como positivas.

Si n sola es ímpar, entonces la cantidad $x^{\frac{m+n}{n}}$ viene á ser negativa al mismo tiempo que x; pero en este caso la equacion de la curva manifiesta que las ordenadas permanecen siempre positivas; por lo que podremos establecer que *la superficie de una de estas curvas es positiva quando la abscisa y la ordenada son del mismo signo, y negativa quando no.*

670 Todos los segmentos parabólicos tienen una relacion constante con el rectángulo ADMP formado por la abscisa y ordenada; porque si en la expresion $\frac{n}{m+n}a^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m+n}{n}}=\frac{n}{m+n}x\times a^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m}{n}}$ se substituye en vez de $a^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m}{n}}$ su valor z, se convertirá en $\frac{n}{m+n}xz$.

Quando $n=m$ la parábola se convierte en linea recta, pues que se tiene $z=a^{\frac{1}{n}}x$, el segmento ACMP se convierte en el triángulo AMP, cuyo valor es, tanto por la fórmula anterior como por la Geometría elemental, igual á $\frac{1}{2}xz$.

Haciendo $n=2$ y $m=1$ se tiene el caso de la parábola vulgar ó apoloniana, y se halla que el segmento $ACMP=\frac{2}{3}xz=\frac{2}{3}AP\times PM$ que es lo mismo que hallámos [484].

671 Hemos visto [315] que si en la equacion $z^n=ax^m$, hacemos negativo al exponente de la x, esta equacion se convierte en la de todas las hipérbolas referidas á sus asíntotas;

luego si en la expresion $\frac{n}{m+n}a^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m+n}{n}}$ hacemos negativa la m,

tendremos para las superficies de los segmentos hiperbólicos la expresion

$$\frac{n}{n-m}a^{\frac{1}{n}}x^{\frac{n-m}{n}}+const.$$

Contando los segmentos desde el orígen de las abscisas, abrazan el espacio indefinido que se halla entre la parte CV (f. 215) de la curva y su asíntota AZ; *el valor de este espacio es finito ó infinito segun sea* m *menor ó mayor que* n. En efecto, para tener el espacio BCMP tomado desde la abscisa $AB=b$ hasta la abscisa $AP=c$, es necesario hacer

sucesivamente $x=b$ y $x=c$ en la expresion $\frac{n}{n-m}a^{\frac{1}{n}}x^{\frac{n-m}{n}}$,

y quitar el primer resultado del segundo,

luego se tendrá $BCMP=\frac{na^{\frac{1}{n}}}{n-m}\left(c^{\frac{n-m}{n}}-b^{\frac{n-m}{n}}\right)$.

Si ahora se supone $b=0$, el punto B caerá sobre el punto A, y el

espacio BCMP se convertirá en ZAPM: pero la cantidad $b^{\frac{n-m}{n}}$ será infinita ó cero, segun sea m mayor ó menor que n;

en el primer caso $ZAPM=\frac{na^{\frac{1}{n}}}{n-m}\left(\frac{1}{0}-c^{\frac{n-m}{n}}\right)$;

y en el 2.° se tendrá $ZAPM=\frac{na^{\frac{1}{n}}}{n-m}\left(c^{\frac{n-m}{n}}-0\right)=\frac{na^{\frac{1}{n}}}{n-m}c^{\frac{n-m}{n}}$.

672 Ahora si suponemos que b tenga una magnitud determinada, y hacemos c infinita, tendremos el espacio indefinido XBCU que será infinito si m es menor que n; y que será igual con $\frac{na^{\frac{1}{n}}}{m-n} b^{\frac{n-m}{n}}$, si m sobrepuja á n. De donde resulta que *quando* m *y* n *son desiguales, de los dos espacios asintóticos, el uno es infinito y el otro finito.*

Substituyendo z en vez de $a^{\frac{1}{n}} x^{\frac{-m}{n}}$

en la expresion $\frac{na^{\frac{1}{n}} x^{\frac{n-m}{n}}}{n-m} = \frac{n}{n-m} xa^{\frac{1}{n}} x^{\frac{-m}{n}}$ se convertirá en $\frac{n}{n-m} xz$,

y el valor de la superficie ZAPMV será $\frac{nxz}{n-m} + const.$

Parece que el término $\frac{nxz}{n-m}$ debia desvanecerse quando se hace $x=0$; pero lo que precede manifiesta la necesidad de no establecer nada sobre este punto antes de haber substituido en vez de z su valor expresado por x.

673 Quando $n=m$ se tiene $xz=a^{\frac{1}{n}}$ ó $xz=\alpha$, haciendo $a^{\frac{1}{n}}=\alpha$; la curva de que se trata en este caso es la hipérbola ordinaria, y equilátera si el ángulo que forman las ordenadas es recto.

La expresion general [671] de la superficie se presenta entonces baxo una forma infinita, qualquiera que sea x, y la diferencial de dicha expresion siendo $\frac{\alpha dx}{x}$ tiene por integral $\alpha l.x + const.$

Los espacios asintóticos son ambos infinitos, porque $l.x$ viene á ser tal [472] por el supuesto de $x=0$ y por el de $x=\infty$. Hagamos para mayor sencillez $\alpha=1$, y sea UMV (fig. 216) una de las ramas de la hipérbola equilátera, cuya *potencia* es igual con la unidad, y AC su exe; baxando desde el vértice C la perpendicular CB se tendrá AB$=1$;

y estando representado el espacio ABC por $l.$AB$+const.$,

y el APM por $l.$AP$+const.$

se tendrá que la superficie BCMP$=l.$AP$-l.$AB;

y como $l.1=0$, será BCMP$=l.$AP.

Del mismo modo se tendrá $l.$AP$'$=BCM$'$P$'$; $l.$AP$''$=BCM$''$P$''$, &c.

de donde se sigue que si las abscisas AP, AP$'$, AP$''$, &c.

estan en progresion geométrica, las superficies correspondientes BCMP, BCM$'$P$'$, BCM$''$P$''$, &c. estarán en progresion aritmética.

674 La hipérbola que acabamos de considerar, siendo equilátera, no nos ha suministrado sino los logaritmos neperianos; pero variando el ángulo de las asíntotas, y tomando siempre AB=1, se puede obtener el sistema de logaritmos que se quiera.

Sea UMV (fig. 215) una hipérbola qualquiera; tirando las ordenadas PM paralelas á la asíntota AZ, tendremos que la expresion de un segmento de su superficie estará representada [625] por $S.z\ \text{sen}.\varphi dx$, y poniendo en vez de z su valor $\frac{\alpha}{x}$,

se tendrá que $S.z\ \text{sen}.\varphi dx = S.\frac{\alpha}{x}\text{sen}.\varphi dx = \alpha\text{sen}.\varphi S.\frac{dx}{x} = \alpha\text{sen}.\varphi\log.x + const$

Y si empezamos á contar los espacios desde el punto B, deberemos determinar la constante, de manera que la integral completa sea cero quando $x=$AB, por lo que se tendrá $const. = -\alpha\ \text{sen}.\varphi\ l.\text{AB}$, y resultará que el espacio BCMP$=\alpha\ \text{sen}.\varphi\ (l.x - l.\text{AB})$ haciendo α sen. φ oficios de módulo.

En general se tiene $\alpha=\text{AB}^2$, y quando AB=1 el módulo se reduce á sen.φ. El de los logaritmos ordinarios siendo [§ 545] 0,43429448, se tiene sen.φ=0,43429448&c.=sen. de $25^\circ 44' 25'' 5$, de donde se sigue que las asíntotas de la hipérbola, cuyas superficies dan los logaritmos ordinarios ó tabulares, forman entre sí un ángulo de $25^\circ 44' 25'' 5$.

675 Haciendo AC$=a$, AP$=x$ y PN$=z$ (fig. 217) la equacion del círculo será $z^2=2ax-x^2$, y la diferencial de su segmento APN, tendrá por expresion [§ 642] $dx\sqrt{2ax-x^2}$, cuya integral es [§ 645] $-\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}+\frac{1}{2}a^2\text{arc.}\left(\cos. = \frac{a-x}{a}\right)$ quando se quiere que se desvanezca por el supuesto de $x=0$.

En la parte $\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}=\frac{1}{2}\text{CP}\times\text{NP}$ se ve la superficie del triángulo PCN, y en $\frac{1}{2}a^2\ \text{arc.}\left(\cos. = \frac{a-x}{a}\right)$ el valor del sect. ACN.

En efecto, el arco que tenga por coseno $\frac{a-x}{a}$ está tomado en el supuesto de ser el radio igual con la unidad; luego si multiplicamos este arco por a que es el radio que aqui se nos da, será el arco AN$=a\times\text{arc.}\left(\cos. = \frac{a-x}{a}\right)$,

y $\frac{1}{2}a^2\ \text{arc.}\left(\cos. = \frac{a-x}{a}\right)=\frac{1}{2}a\times a\times\text{arco}\left(\cos. = \frac{a-x}{a}\right)=\frac{1}{2}\text{AC}\times\text{arcoAN}$, que es lo mismo que diximos en la Geometría elemental.

Suponiendo $x=2a$ en la expresion de APN
se convierte en $\frac{1}{2}a^2\times\text{arco}(\cos.=-1)=\frac{1}{2}a^2\pi$,
designando por π la semicircunferencia del círculo cuyo radio es 1, y pertenece entonces al semicírculo; luego se tendrá el círculo entero

$$=a^2\pi=\tfrac{1}{2}a\times 2a\pi=\tfrac{1}{2}\text{radio}\times\text{circunferencia},$$

que es lo mismo que se encontró en la Geometría elemental.

676 Siendo la ordenada de la elipse $\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}$,

el segmento elíptico será igual á $\frac{b}{a}\,S.dx\sqrt{2ax-x^2}$;

y como es nulo al mismo tiempo que el segmento circular APN,

se tendrá $APN:AMP::S.dx\sqrt{2ax-x^2}:\frac{b}{a}\times S.dx\sqrt{2ax-x^2}::a:b$.

Si cada parte de segmento elíptico guarda con el homólogo circular esta razon, toda la elipse guardará con el círculo la misma razon; porque en primer lugar tendremos que

quadrante elipt. BCA : *quadrante circular* ECA::b:a,

y quadruplicando los términos de la primera razon,

se tendrá *superf. de elipse* : *superf. de círculo* ::b:a,

de donde *superf. de elipse* $=\frac{b}{a}\times$ *super. de círc.* (cuyo radio $=a$) $=$

$$\frac{b}{a}\times 3,141\&c\times a^2=3,141\&c\times ab.$$

Pero esta expresion es la de un círculo cuyo radio sea medio proporcional entre a y b, porque entonces el quadrado de dicho radio sería $=ab$; luego *la superficie de la elipse es igual á la de un círculo cuyo radio sea medio proporcional geométrico entre los dos semiexes de la elipse.*

677 La hipérbola referida á su exe tiene por equacion

$z^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)$, y por lo mismo será $AQR=\frac{a}{b}\,S.dx\sqrt{2ax+x^2}$,

que podríamos tambien hallar sus valores aproxîmados por las series.

678 Del mismo modo se aplica la fórmula á las curvas trascendentes; y para manifestarlo, lo haremos respecto de la *logarítmica* cuya naturaleza es la siguiente.

Supongamos que en el exe AX (fig. 218) se tomen las partes iguales

AC, CE, EG, GJ, &c.

hácia la derecha del punto A, y las AC′, C′E′, E′G′ &c.

hácia la izquierda, y en los puntos de division se levantan las ordenadas

&c. G′H′, E′F′, C′D′, AB, CD, EF, GH, &c.

que esten en progresion geométrica tomando AB por unidad; la curva H′F′D′BD, &c. será la *logarítmica*, y como las abscisas AC, AE, AG, &c. estarán en progresion *aritmética*, resulta que serán [I. 304] los logaritmos de las ordenadas, por lo que la equacion de esta curva será $x=l.z$;

si se toma por exe de abscisas la AX, y por exe de ordenadas la AZ; y $z = l.x$ si se trastornan los exes, esto es, si se cuentan las x sobre el AZ, y las z sobre el AX.

Si hacemos la substitucion en la fórmula zdx en este supuesto, tendremos $S.zdx = S.dxl.x =$ [§ 635] $xl.x - x + const.$

La parte variable de esta expresion se convierte en cero quando $x = 0$, porque haciendo $x = \frac{1}{m}$ toma la forma

$$\frac{1}{m} l. \frac{1}{m} - \frac{1}{m} = \frac{1}{m}\left(\log. 1 - \log. m\right) - \frac{1}{m} = -\frac{\log. m}{m} - \frac{1}{m},$$

baxo la qual es nula [579] quando m es infinita, y por consiguiente quando $x = 0$; luego es inútil añadir una constante quando se quieren contar los segmentos sobre el exe xAX.

Haciendo $x = AB = 1$, da la expresion del espacio asintótico mBAx que es finito, é igual con -1.

Para hacer uso de la otra equacion $x = l.z$ substituiremos en vez de dx su valor $\frac{dz}{z}$, lo que dará $S.zdx = S.z \times \frac{dz}{z} = S.dz = z$.

Hemos supuesto el módulo igual con la unidad; si fuese igual con M se tendria $S.dxl.x = xl.x - S.Mdx = xl.x - Mx$.

679 Para hacer alguna aplicacion á las curvas quando se refieren á coordenadas polares, propongámonos quadrar la espiral que tiene por equacion $z = Ax^n$ [§ 339], en la qual x es igual al arco ON (fig. 219) y $z = AM$.

Siendo las coordenadas polares, haremos uso para quadrarla, de la fórmula $\frac{z^2dx}{2}$ [§ 626]; substituyendo en vez de z su valor, se tendrá

$$\frac{A^2x^{2n}dx}{2}, \text{ é integrando resultará } \frac{A^2x^{2n+1}}{4n+2} + const.$$

pero como esta superficie es cero quando lo es el arco $ON = x$, se sigue que en este caso la constante es cero, y por consiguiente la superficie

$$ACM = \frac{A^2x^{2n+1}}{4n+2}.$$

Despues de una revolucion del radio vector, se tendrá el espacio

$$ACMBC'M' = \frac{A^2(2\pi + ON)^{2n+1}}{4n+2}, \text{ y así sucesivamente.}$$

En la espiral de Arquimedes [339] es igual á $\frac{b}{a}$, ó tomando al radio b por unidad, como a es su circunferencia se tendrá

$$A = \frac{1}{2\pi},\ n = 1 \text{ y } ACM = \frac{x^3}{24\pi^2},$$

resultado que quando se hace en él $x=2\pi$, da ACMB$=\frac{\pi}{3}$.

Quando $n=-1$, la espiral se llama *hiperbólica*, y ACM$=-\frac{A^2}{2x}$. La superficie de esta curva que hace al rededor del punto A una infinidad de revoluciones, es infinita quando $x=0$.

En fin quando $x=l.z$, que da $dx=\frac{dz}{z}$, la espiral se llama *logarítmica*, y la diferencial $\frac{z^2dx}{2}$ se convierte en $\frac{zdz}{2}$, y da ACM$=\frac{z^2}{4}$. La superficie es nula quando $x=0$; pero entonces x es infinita, porque la curva propuesta forma con la precedente una infinidad de revoluciones al rededor del polo A.

680 La diferencial del arco de una curva referida á coordenadas perpendiculares entre sí, está expresada por $\sqrt{dx^2+dz^2}$ [§ 591]; luego si substituimos en ella en vez de dz^2 su valor sacado de la equacion diferencial de la curva propuesta, tomará la forma Xdx, y su integral dará la longitud de esta curva. Pedir la longitud del arco de una curva es pedir su *rectificacion*, porque la solucion de este problema quando se obtiene exâctamente nos conduce á determinar una linea recta que sea igual en longitud al arco de que se trata.

Tomemos por primer exemplo las parábolas de todos los grados que tienen por equacion $z=ax^n$ representando n un número qualquiera entero ó fraccionario, y tendremos

$$dz=nax^{n-1}dx;\ \sqrt{dx^2+dz^2}=dx\times\sqrt{1+n^2a^2x^{2n-2}};$$

luego el arco parabólico estará representado por $S.(1+n^2a^2x^{2n-2})^{\frac{1}{2}}dx$.

Esta integral se obtendrá baxo una forma finita y algebráica quando el exponente $2n-2$ sea igual á la unidad, ó se encuentre contenido en ella un número exâcto de veces [642].

Supongamos al principio $2n-2=1$, y tendremos que $n=\frac{3}{2}$, y $S.(1+n^2a^2x^{2n-2})^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{n^2a^2}S.(1+n^2a^2x^{2n-2})^{\frac{1}{2}}\times n^2a^2dx=....$

$$\frac{1}{n^2a^2}\times\tfrac{2}{3}(1+n^2a^2x^{2n-2})^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{27a^2}(1+\tfrac{9}{4}a^2x)^{\frac{3}{2}}+const.;$$

la curva propuesta seria dada por la equacion $z=ax^{\frac{3}{2}}$ ó $z^2=a^2x^3$; y será por consiguiente la misma que la parábola de tercer órden, que es la evoluta [623] de la parábola ordinaria. Si se cuentan los arcos desde el punto en que $x=0$

se tendrá para la longitud del arco $\frac{8}{27a^2}[(1+\frac{9}{4}a^2x)^{\frac{3}{2}}+1]$.

Haciendo sucesivamente $2n-2=\frac{1}{2}$, $=\frac{1}{3}$ &c. resultará $n=\frac{5}{4}$; $=\frac{7}{6}$ &c

lo que manifiesta que las parábolas que tienen por equaciones

$$z^4=a^4x^5,\ z^6=a^6x^7,\ \&c.$$

son rectificables; de las demas no se puede obtener la rectificacion de sus arcos sino por aproxîmacion.

681 El arco de las hipérbolas contenidas en la equacion $z=ax^{-n}$ tiene por expresion $S.x^{-n-1}dx(x^{2n-2}+n^2a^2)^{\frac{1}{2}}$, y no se puede obtener sino por aproxîmacion.

682 La diferencial del arco de círculo es $\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ quando se supone el orígen en el centro; y $\frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ quando se le supone en la circunferencia. Baxo qualquiera de estas formas que se considere, no se puede obtener su integral sino por aproxîmacion, como lo hemos hecho ya [648] con la $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ á que se reduce la primera quando $a=1$.

683 Pasemos á la elipse y tomemos por equacion de esta curva $z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$; la diferencial de su arco será $\frac{dx\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}$ cuyo valor aproxîmado podríamos hallar por series.

684 Siendo la equacion de la hipérbola $z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$ se tiene $\frac{dx\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}}{a\sqrt{x^2-a^2}}$ para la diferencial de su arco; cuya integral aproxîmada se podrá hallar por series.

685 Las primeras superficies curvas que han considerado los Geómetras han sido las de revolucion; porque las diferenciales de sus superficies, y de los volúmenes que comprenden, tienen una expresion mas simple que sus analogas entre las superficies curvas en general.

Quando la curva que gira es una seccion cónica se origina un cuerpo á que se da el nombre de *conoide*; si es parábola se le llama *conoide parabólico* ó *paraboloide*: si elipse se le llama *conoide elíptico* ó *elipsoide*; quando la semielipse gira al rededor del exe mayor resulta el *elipsoide prolongado*, y quando al rededor del menor el *aplanado*. El elipsoide, de qualquiera clase que sea, recibe tambien el nombre de *esferoide*; finalmente quando la seccion cónica que gira es una hipérbola recibe el nombre de *conoide hiperbólico* ó *hiperboloide*.

Con el objeto de [illegible] de las fórmulas [627 y 628] nos propondremos hall[illegible] y volúmen del paraboloide engendrado por el arco AM ([illegible] dedor del exe AP; y tendremos que

como la equacion de la parábola es $z^2=px$ da $x=\frac{z^2}{p}$ y $dx=\frac{2zdz}{p}$,

cuyo valor substituido en el radical de la expresion $d.s=2\pi\sqrt{dx^2+dz^2}$ é integrando dará

super. de paraboloide $=\text{S}.2\pi\times z\sqrt{\frac{4z^2dz^2}{p^2}+dz^2}=\text{S}.\frac{2\pi zdz}{p}\sqrt{4z^2+p^2}$;

para integrar esta expresion haremos $p^2+4z^2=u^2$,

lo que da diferenciando $8zdz=2udu$,

de donde dividiendo por 4 sale $2zdz=\frac{udu}{2}$;

y haciendo las substituciones correspondientes en la expresion de arriba

se convertirá en $\text{S}.\frac{\pi udu}{2p}\times(u^2)^{\frac{1}{2}}=\text{S}.\frac{\pi u^2du}{2p}=\frac{\pi u^3}{6p}+const.$

que substituyendo en vez de u su valor $(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}$

se convierte en $\frac{\pi(p^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}{6p}+const.$;

y determinando la constante de manera que se reduzca la integral á o

quando $z=0$, se tendrá $const.=-\frac{\pi p^3}{6p}=-\frac{\pi p^2}{6}$,

por lo que *superficie de paraboloide* $=\frac{\pi(p^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}{6p}-\frac{\pi p^2}{6}$.

686 Si nòs propusiéramos hallar el volúmen del mismo paraboloide, substituiríamos en la expresion $dV=\pi z^2dx$ en vez de z^2 su valor px, é integraríamos; lo que daria

volúmen de paraboloide $=\text{S}.\pi z^2dx=\text{S}.\pi pxdx=\frac{\pi px^2}{2}=\frac{\pi px.x}{2}=\pi z^2\times\frac{x}{2}=$ círculo LRMS$\times\frac{\text{AP}}{2}=\frac{1}{2}$ cilindro LNQM.

Para hallar el volúmen del elipsoide, substituiríamos en la misma expresion en vez de z^2 su valor $\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$, y tendríamos que el volúmen del cuerpo que engendra el segmento de elipse APM (fig. 221) estará representado por $\text{S}.\frac{\pi b^2}{a^2}(2ax-x^2)dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2-\frac{x^3}{3}\right)+const.$

que como dicho cuerpo se reduce á o quando $x=0$, la constante es o; Luego si suponemos ahora que $x=2a$ nos vendrá para el elipsoide prolongado ACBD, la expresion

$\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a\times4a^2-\frac{8a^3}{3}\right)=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{12a^3-8a^3}{3}\right)=\pi\frac{b^2}{a^2}\times\frac{4a^3}{3}=\frac{4\pi b^2a}{3}$.

Quando $a=b$, el cuerpo propuesto se convierte en una esfera, y la expresion de su volúmen es $\frac{4\pi a^3}{3}=\frac{4\times3,14\&c.}{3}a^3=4,1887\&c\times a^3$ como se halla por la Geometría elemental.

De la separacion de las variables en las equaciones diferenciales del primer órden; y del modo de hallar el factor propio para hacer integrable una equacion diferencial del primer órden.

687 Hasta ahora hemos supuesto que los coeficientes diferenciales estaban expresados inmediatamente por medio de la variable de que depende su funcion primitiva; pero muchas veces no se tiene sino una equacion diferencial que comprende estas diversas cantidades. Para el primer órden, la equacion diferencial quando es del primer grado con relacion á dx y á dz, tiene necesariamente la forma $Mdx+Ndz=0$, y expresa una relacion entre la variable x, la funcion z y su coeficiente diferencial $\frac{dz}{dx}$.

El primer medio que se ha ofrecido á los analistas para descubrir la equacion primitiva de que proviene esta, ha sido *el procurar separar las variables, es decir, el trasformar la equacion* $Mdx+Ndz$, *en otra de la misma forma* $Xdx+Zdz=0$, *siendo* X *una funcion de* x *sola, y* Z *una funcion de* z *sola.* En efecto, quando se ha llegado á este punto, los términos Xdx y Zdz se integran por los métodos enseñados precedentemente, y se tiene $S.Xdx+S.Zdz=C$, designando C una constante arbitraria.

Para dar un exemplo de los casos en que la equacion deferencial se presenta inmediatamente baxo la forma de arriba, sea $x^m dx+z^n dz=0$, y se hallará inmediatamente $\frac{x^{m+1}}{m+1}+\frac{z^{n+1}}{n+1}=C$.

Si la equacion propuesta fuese $zdx-xdz=0$, la separacion seria fácil de efectuar, porque se ve que dividiendo por xz, se hallaria $\frac{dx}{x}-\frac{dz}{z}=0$; tomando separadamente la integral de cada término de esta última, se tendria $l.x-l.z=C$, ó $l.\frac{x}{z}=C$; y pues que se puede mirar la constante arbitraria como un logaritmo, se concluiria $l.\frac{x}{z}=l.c$; y pasando á los números resultaria $\frac{x}{z}=c$, ó $x=cz$.

688 Por lo visto en este exemplo, se echa de ver que la separacion de las variables se efectuará de la misma manera en las equaciones $Zdx-Xdz=0$; $XZ_1dx-ZX_1dz=0$, porque la primera dividiendo por XZ, da $\frac{dx}{X}-\frac{dz}{Z}=0$; y la segunda por X_1Z_1, $\frac{Xdx}{X_1}-\frac{Zdz}{Z_1}=0$.

En general, se pueden separar las variables, si quando se toma el valor de $\frac{dz}{dx}$ en la equacion propuesta, se halla $\frac{dz}{dx}=XZ$; se saca de esta expresion $dz=XZdx$, de donde dividiendo por Z, y trasladando resulta $Xdx-\frac{1}{Z}dz=0$, y por consiguiente $S.Xdx-S.\frac{1}{Z}dz=C$.

689 Hay aun un caso mas extenso en que se separan fácilmente las variables; este es quando M y N son funciones *homogéneas* de x y de z. Nosotros haremos conocer con este motivo una notable propiedad de las funciones *homogéneas*, y es que *si se tiene una funcion algebráica de las cantidades* x,z,t,&c. *en que la suma de los exponentes de cada una de estas letras sea la misma para todos los términos, é igual con* m, *y que se substituya* Px *en vez de* z, Qx *en vez de* t, &c. *el resultado será divisible por* x^m. En efecto, un término qualquiera de esta funcion siendo de la forma $Ax^nz^pt^q$&c. se convertirá por la substitucion indicada en $AP^pQ^q......x^{n+p+q+\&.}$ Más por la hipótesis se tiene en todos los términos $n+p+q+\&c.=m$, luego x^m será factor comun. De donde se sigue que si la funcion propuesta estubiese igualada con cero, ó fuese una fraccion que tubiese por numerador y denominador dos polinomios homogéneos del mismo grado, la cantidad x desapareceria enteramente del resultado.

690 Segun lo que precede, *basta hacer* z=xt *para separar las variables en la equacion* Mdx+Ndz=0; en efecto, las funciones M y N toman la forma Tx^m, T_1x^m, no comprendiendo T y T_1 sino la nueva variable t; y como $dz=tdx+xdt$,
resulta dividiendo por x^m, $Tdx+T_1(tdx+xdt)=0$,

que da $dx(T+T_1t)+T_1xdt=0$ ó $\frac{dx}{x}+\frac{T_1dt}{T+tT_1}=0$;

de donde se saca $S.\frac{dx}{x}+S.\frac{T_1dt}{T+tT_1}=C$.

Apliquemos primero esta transformacion á la equacion $xdx+zdz=nzdx$,
que trasladando se convierte en $(x-nz)dx+zdz=0$;
y haciendo $z=xt$ tendremos $dz=xdt+tdx$,
lo que dará $(x-nxt)dx+tx(xdt+tdx)=0$,
ó dividiendo por x será $(1-nt)dx+xtdt+t^2dx=0$,
que da $(1-nt+t^2)dx+xtdt=0$,
de donde dividiendo por $(1-nt+t^2)x$ sale $\frac{dx}{x}+\frac{tdt}{1-nt+t^2}=0$,

cuya integral es $lx+S.\frac{tdt}{1-nt+t^2}=C$.

Propongámonos aun integrar la equacion $xdz-zdx=dx\sqrt{x^2+z^2}$, haciendo $z=xt$ y dividiendo por x todos sus términos reunidos en un

olo miembro será $dx\sqrt{1+t^2}-xdt=0$, lo que dará $\frac{dx}{x}-\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=0$,
y se obtendrá despues por la integracion de cada término en particular

$$lx-S.\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=l.c.$$

Para integrar la expresion $\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

la multiplicaremos por el factor $\frac{t+\sqrt{1+t^2}}{t+\sqrt{1+t^2}}$,

lo que la convertirá en $\frac{\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}(t+\sqrt{1+t^2})}{t+\sqrt{1+t^2}}=\frac{\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}+dt}{t+\sqrt{1+t^2}}$,

en laqual siendo el numerador la diferencial del denominador, se tendrá

$$S.\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=S.\frac{\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}+dt}{t+\sqrt{1+t^2}}=l.\left(t+\sqrt{1+t^2}\right),$$

y resultará $l.x-l.\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)=l.c$ ó $l.x=l.c+l.\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$;
volviendo á poner en vez de t su valor $\frac{z}{x}$, dará $l.x=l.c+l.\left(\frac{z+\sqrt{x^2+z^2}}{x}\right)$.

691 La equacion $(a+mx+nz)dx+(b+px+qz)dz=0$
se puede fácilmente hacer homogénea, substituyendo $t+\alpha$ en vez de x
y $u+\beta$ en vez de z, y entonces se tiene $dx=dt$ y $dz=du$,
y $(a+m\alpha+mt+nu+n\beta)dt+(b+p\alpha+q\beta+pt+nq)du=0$;
se harán desaparecer los términos constantes determinando α y β,
de manera que satisfagan á las equaciones
$a+m\alpha+n\beta=0, b+p\alpha+q\beta=0$, que dan $\alpha=\frac{nb-az}{qm-pn}$ y $\beta=\frac{pa-mt}{qm-pn}$;
y entonces quedará reducida la equacion diferencial á

$$(mt+nu)dt+(pt+qu)du=0,$$

homogénea con relacion á las nuevas variables u y t.

692 La trasformacion que acabamos de efectuar es la misma que aquella de que usámos [197] para mudar el orígen de las coordenadas; y quando $mq-np=0$, caso en que α y β vienen á ser infinitas, se tiene $q=\frac{np}{m}$, y por consiguiente $px+qz=px+\frac{np}{m}z=\frac{p}{m}(mx+nz)$;

y substituyendo este valor en la equacion propuesta se trasformar en

$$adx+bdz(mx+nz)\left(dx+\frac{p}{m}dz\right)=0.$$

En la que haciendo $mx+nz=t$ quedarán separadas las variables, porque substituyendo este valor y el de dz que de ella resulta, quitando el coeficiente de dx, tendremos $dx+\frac{(bm+pt)dt}{amn-bm^2+(mn-pm)t}=0$; la integral de esta equacion contendrá logaritmos, excepto quando $mn-pm=0$, en que será $x+\frac{2bmt+pt^2}{2(amn-bm^2)}=C$.

La trasformacion empleada en este último caso ha convertido la equacion propuesta en otra que no contiene mas de una variable; y se deduce que *qualquiera que sea la equacion sobre que se haya producido este efecto*, se le podrá dar la forma $dx+Tdt=0$, siendo T una funcion de t sola, y que se sacará en general $x+\text{S}.Tdt=C$.

693 La separacion de las variables se consigue de un modo muy simple en la equacion $dz+Pzdx=Qdx$, en que P y Q expresan funciones qualesquiera de x; pues substituyendo en ella Xt, y $tdX+Xdt$ en lugar de z y de dz, se convierte en $tdX+Xdt+PXtdx=Qdx$.

La cantidad X considerada como una funcion indeterminada de x, podemos determinarla de manera que la equacion precedente se divida en otras dos en que las variables se puedan separar, cuya condicion quedará satisfecha si se hace $Xdt+PXtdx=0$, que da $\frac{dt}{t}+Pdx=0$, é integrando sera $l.t+\text{S}.Pdx=0$ ó $l.t=-\text{S}.Pdx$;

y pasando á los números $t=e^{-\text{S}.Pdx}=\frac{1}{e^{\text{S}.pdx}}$;

aqui se desprecia la constante arbitraria, porque bastará añadir una al fin de la operacion. Pero en virtud de este supuesto la equacion propuesta se reduce á $tdX=Qdx$, que da $dX=\frac{Qdx}{t}$,

en la qual substituyendo en vez de t el valor que acabamos de hallar, dará $dX=e^{\text{S}.Pdx}Qdx$, y $X=\text{S}.e^{\text{S}.Pdx}Qdx+C$,

y por consiguiente $z=Xt=e^{-\text{S}.Pdx}(\text{S}.e^{\text{S}.Pdx}Qdx+C)$;

la equacion $dz+Pzdx=Qdx$ es notable porque la variable z y su diferencial no se encuentran sino en el primer grado, y se llama á causa de esta circunstancia *equacion lineal del primer órden*; cuya denominacion cree Lacroix deber mudar en la de *equacion del primer grado, y del primer órden.*

694 Los primeros analistas que se han ocupado del cálculo integral,

clasificaban las equaciones diferenciales por el número de sus términos. En las que no tienen sino dos y cuya forma es por consiguiente $\beta u^q t^n dt = \alpha u^e t^f du$, las variables se separan inmediatamente, pues que se saca de ellas $\beta t^{n-f} dt = \alpha u^{e-q} du$; pero no sucede lo mismo con las equaciones de tres términos comprendidas en la fórmula

$$\gamma u^i t^k dt + \beta u^g t^h du = \alpha u^e t^f du.$$

Esta equacion se puede convertir en virtud de varios supuestos en

$$dz + bz^n dx = ax^m dx,$$

que en el caso de $n=2$ se convierte en $dz + bz^2 dx = ax^m dx$;
esta equacion se conoce con el nombre de *equacion de Ricati*, porque este Geómetra italiano fue el primero que se ocupó de ella; la qual es integrable siempre que m tenga la forma $\frac{-4n}{2n\pm 1}$ representando n un número entero positivo.

695 En muchas ocasiones como hemos visto [§ 690] respecto de $\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ se consigue hacer integrables las expresiones multiplicándolas por un factor; este método que se debe á Euler es sumamente ingenioso, y lo teníamos expuesto en nuestros primeros borradores; pero atendiendo á que esta obra sale ya demasiado extensa y que siempre dexaríamos esta teoría muy incompleta, lo omitiremos así como otros puntos importantes que teníamos igualmente escritos; porque aunque es cierto que todos ellos son interesantes, no obstante ya salen de la clase de elementales, en las cátedras no se pueden explicar por el corto tiempo que se destina para la enseñanza de estas ciencias, y por otra parte juzgamos que quanto hemos expuesto es suficiente paraque los que deseen imponerse á fondo en estas ciencias puedan entender las excelentes obras maestras que hay escritas acerca de ellas (*).

696 Por lo qual terminaremos esta obra dando á conocer siquiera el objeto de un nuevo cálculo que se conoce en el dia con el nombre de *cálculo de las variaciones*. Para esto, observaremos que quando el estado de una qüestion ha determinado una dependencia entre muchas variables, la diferenciacion ordinaria supone que esta dependencia permanece siempre la misma en el curso del cálculo; y se concibe que si la una de las variables debe ser funcion de las otras, la forma de esta funcion no muda, y que por consiguiente los incrementos ó decrementos que sufre, estan por su naturaleza ó por la equacion de que ella depende, unidos de un modo invariable con los que pueden re-

---

(*) *Las principales son las de Euler, Cousin, y Lacroix. Es sensible que nuestro Geómetra Don Josef Chaix no haya publicado su cálculo integral, pues entonces tendríamos en nuestra lengua un tratado completo de cálculo infinitesimal, que es tan deseado de los buenos españoles.*

cibir las cantidades que entran en su composicion. Diversos problemas de Geometría y de Mecánica, propuestos poco tiempo despues del descubrimiento del cálculo diferencial, hicieron conocer bien pronto á los analistas que este punto de vista no era bastante general, y que habia casos en que era necesario suponer que la forma misma de la funcion variase; esto es lo que ha dado nacimiento á este cálculo, cuyo descubrimiento es el resultado de los primeros trabajos de Lagrange. Antes de él, se habian resuelto muchas qüestiones del género de las que se obtienen por este cálculo, principalmente en la obra de Euler, intitulada: *Methodus inveniendi lineas curvas, maximis minimisve propietates gaudentes, sive solutio probl. &c.* pero solamente por procedimientos particulares que era necesario modificar segun las diversas circunstancias que presentaban las aplicaciones que se tienen á la vista.

Hé aqui la idea mas general que se puede uno formar del cálculo de las variaciones.

Supongamos que las variables x y z al principio unidas entre sí por una equacion ó dependencia qualquiera, vengan á mudar porque la forma de esta equacion, ó la relacion que resulta de la dependencia establecida, ha dexado de ser la misma; en este caso no se sabria expresar esta circunstancia de un modo mas general, que considerando los incrementos de x y de z como absolutamente independientes el uno del otro; porque en efecto esta hipótesis, no designando ninguna relacion particular entre x y z las comprende todas. De aqui se sigue que el cálculo de las variaciones no se puede emplear sino en expresiones á que se ha aplicado ya el cálculo diferencial, y que no se diferencia de este último sino por la independencia que supone entre variables que se habian mirado antes como unidas entre sí por relaciones constantes. El exemplo siguiente aclarará estas nociones.

La expresion $\frac{zdx}{dz}$ que pertenece á la subtangente de una curva, representa una funcion determinada de x, quando se considera en ella á z como una funcion cuya composicion en x es conocida; y si esta última viene á mudar, la primera muda tambien.

Se tendrán, puede ser, algunas dificultades en concebir como se ha podido someter al cálculo la variabilidad de una funcion que no es sino la dependencia abstracta en que muchas cantidades se hallan las unas con relacion á las otras; pero es fácil desvanecerlas observando que la dependencia entre las cantidades z y x mudará si se hace variar la primera, independientemente de la segunda. Así, en el exemplo actual, si se supone que permaneciendo x la misma, z y $\frac{dz}{dx}$ varian, la relacion

de z y de x habrá mudado necesariamente, pues que estas cantidades son conseqüencias inmediatas de esta relacion: se puede aun no hacer variar sino á $\frac{dz}{dx}$ en la fórmula $\frac{zdx}{dz}$, porque no depende sino de un solo valor de z; pero si se considerase una expresion que estubiese afecta del signo S, seria necesario hacer variar al mismo tiempo á z y á $\frac{dz}{dx}$.

Para diferenciar baxo este punto de vista qualquier expresion que sea, basta hacer variar en ella á z, dz, d^2z.....&c. sin tocar á x; pero tratando á esta última variable como la primera, se llegan á obtener resultados mas generales, y mas simétricos que los que se obtendrian de otro modo, y que conducen á observaciones muy interesantes sobre la naturaleza de las fórmulas diferenciales.

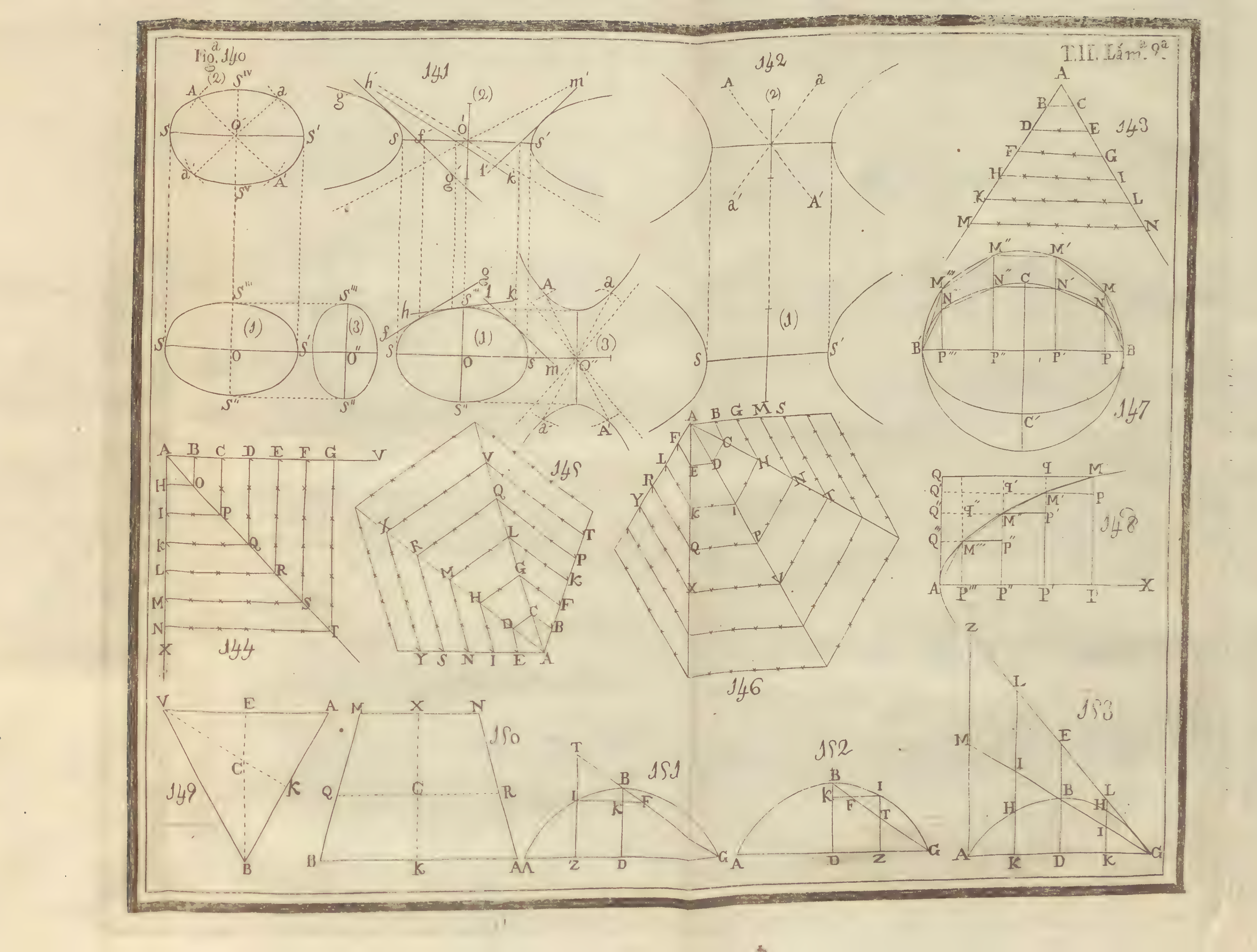
Para no confundir los signos de la nueva especie de diferenciacion, en la qual x y z se consideran como independientes, con los de la primera, donde se consideraba una de estas variables como funcion de la otra, empleó Lagrange la característica δ; y así, él supone que quando z no muda sino por el efecto de la mudanza de x, su diferencial es dz; pero que quando la relacion de z y de x varía, estas dos cantidades vienen á ser respectivamente $x+\delta x$, $z+\delta z$, y se designan baxo el nombre de *variaciones* los incrementos δx y δz.

De aqui se sigue que así como se tiene $du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dz}dz$, quando u es una funcion de x y de z, se tendrá tambien

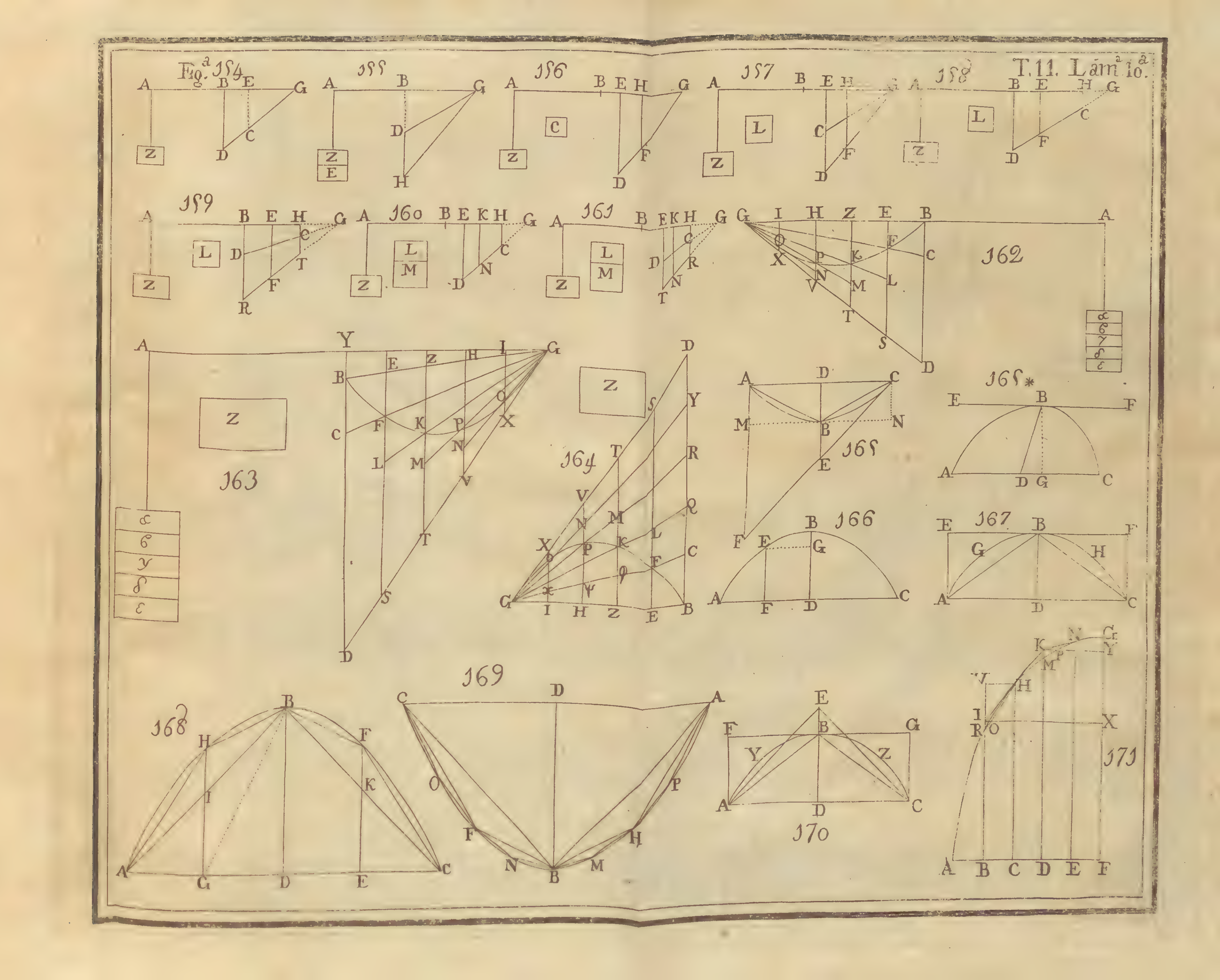
$$\delta u=\frac{\delta u}{\delta x}\delta x+\frac{\delta u}{\delta z}\delta z.$$

Todas las aplicaciones que hasta ahora se han hecho del cálculo de las *variaciones*, han tenido por objeto fórmulas integrales *indeterminadas*, esto es, fórmulas generales, tales como S.zdx, en la qual no se señala ninguna forma particular á la funcion z; y se han propuesto encontrar la relacion que debia haber entre z y x, paraque estas fórmulas tomadas entre límites señalados viniesen á ser *máxîmos* ó *mínimos*.

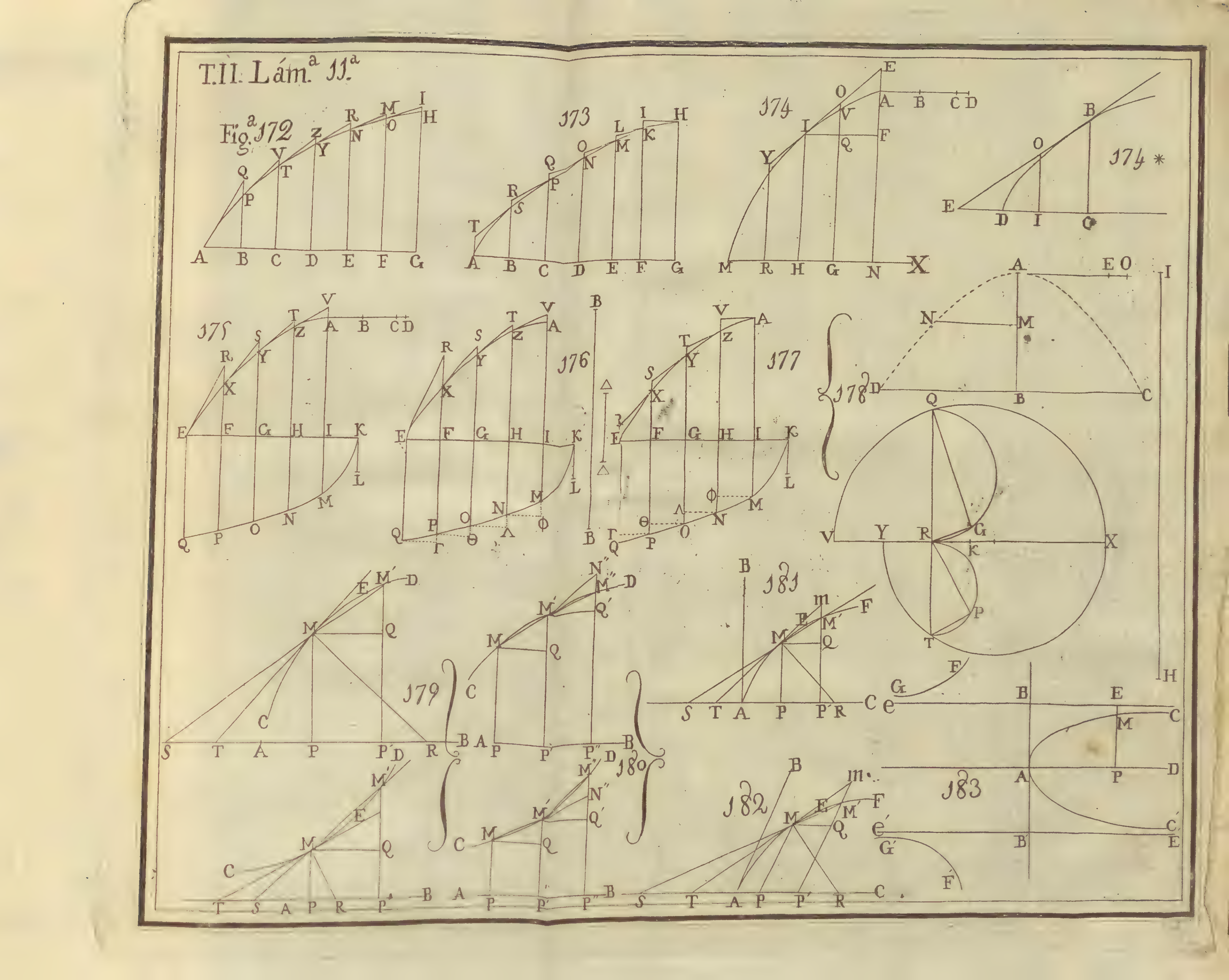
FIN.


T. II. Lám.a 9.a
Fig. 140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153

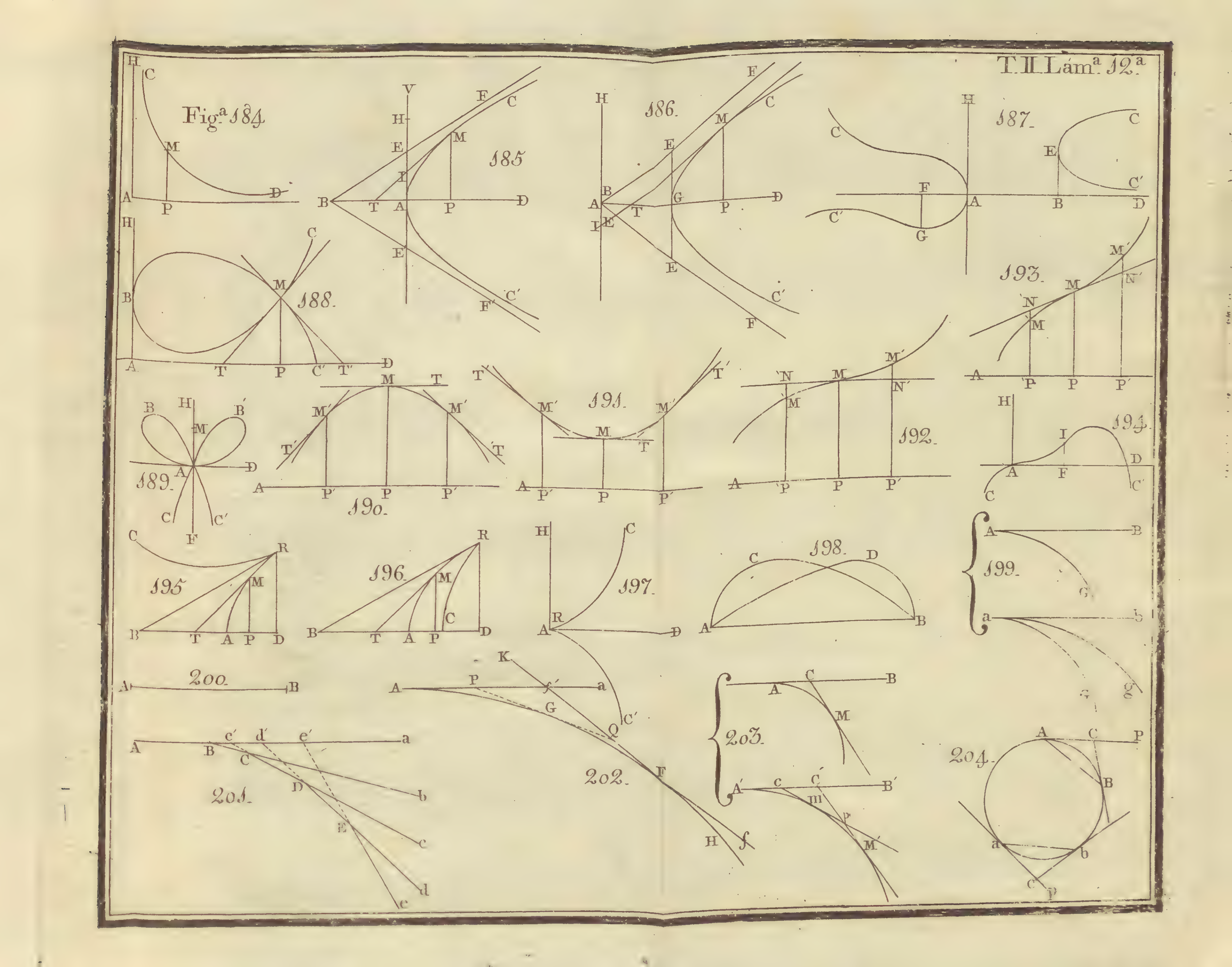




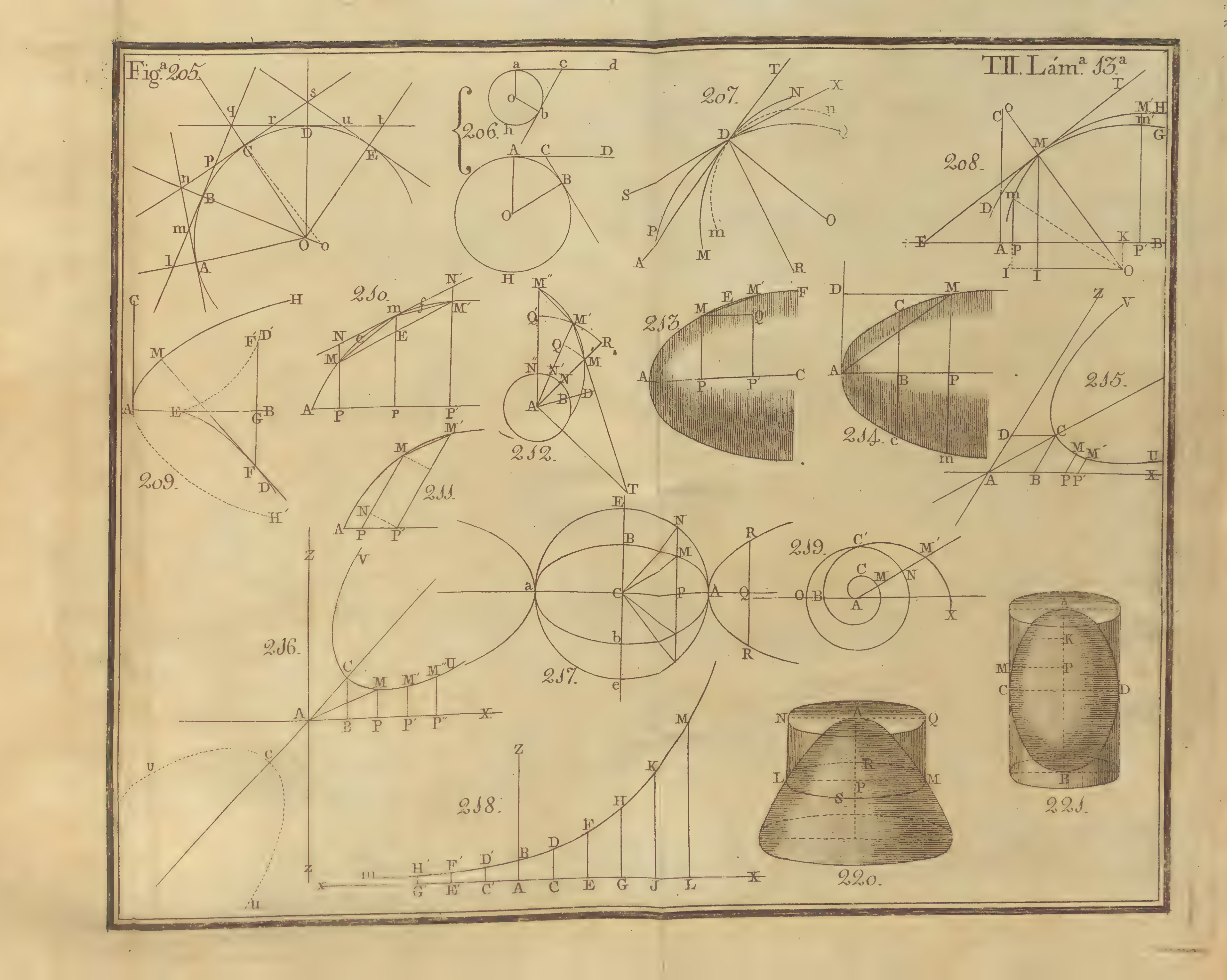
T. 11. Lám.ª 10.ª
Fig.ª 154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
165*
166
167
168
169
170
171


T.II. Lám.ª 11.ª
Fig.ª 172
173
174
174 *
175
176
177
178
179
180
181
182
183

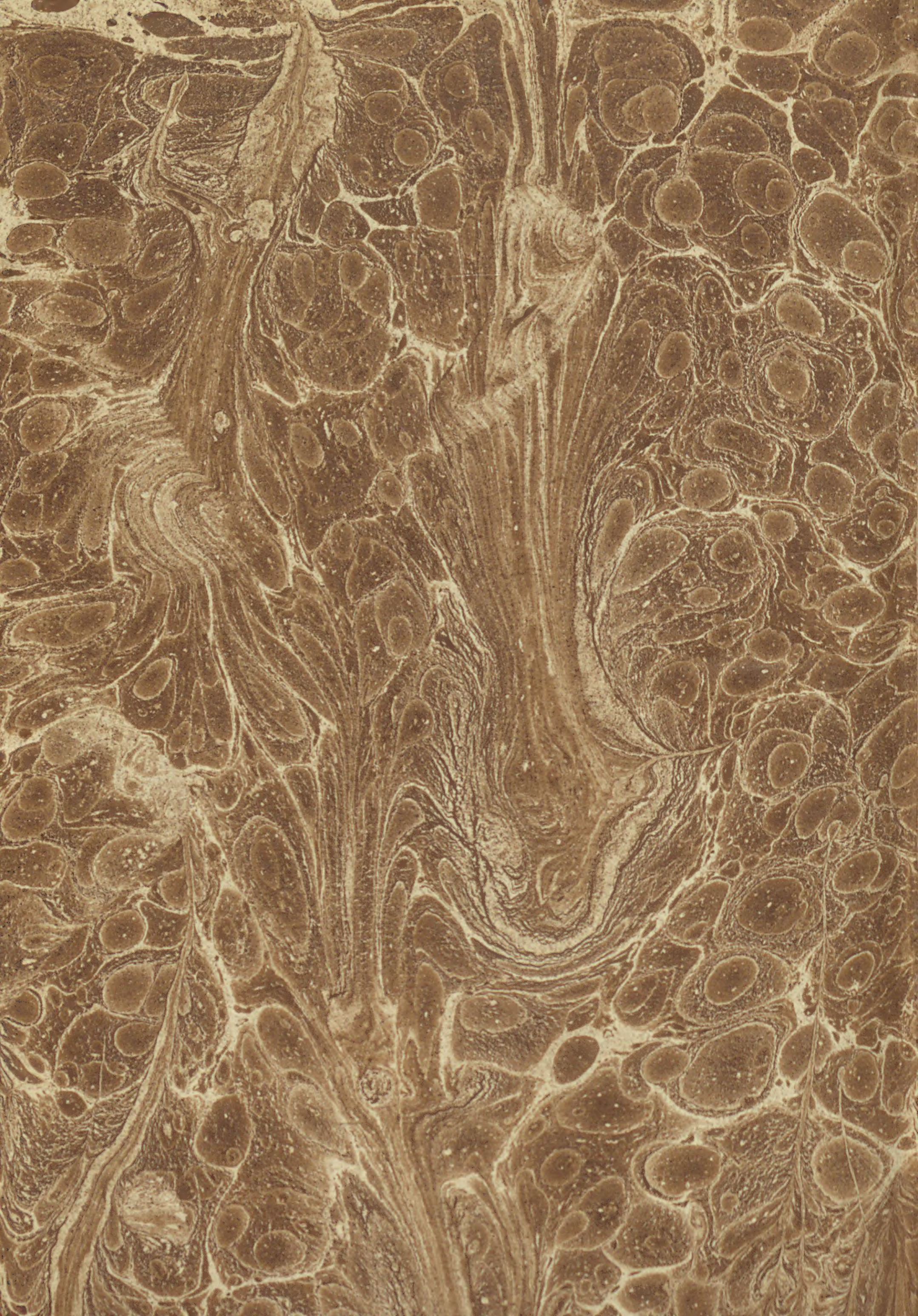



Fig.a 184.
185
186.
187.
188.
189.
190.
191.
192.
193.
194.
195
196.
197.
198.
199.
200.
201.
202.
203.
204.




Figª 205.
T.II. Lámª 13ª
206.
207.
208.
209.
210.
211.
212.
213.
214.
215.
216.
217.
218.
219.
220.
221.









251
VALLEJO
MATEMATICA
2
198


colorchecker CLASSIC
calibrite
mm